université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Examen première session** **PARCOURS : LIMA 5032 Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 18/12/2018 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Corrigé de l'épreuve	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

1. *Soit* $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *En appliquant la méthode des coefficients indéterminés Déterminer la décomposition de Cholesky* $S = {}^tRR$ *(si elle existe).*

On écrit $R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$ Alors

$$^tRR = \begin{pmatrix} r_{1,1}^2 & r_{1,1}r_{1,2} & r_{1,1}r_{1,3} \\ r_{1,1}r_{1,2} & r_{1,2}^2 + r_{2,2}^2 & r_{1,2}r_{1,3} + r_{2,2}r_{2,3} \\ r_{1,1}r_{1,3} & r_{1,2}r_{1,3} + r_{2,2}r_{2,3} & r_{1,3}^2 + r_{2,3}^2 + r_{3,3}^2 \end{pmatrix}$$

On résout alors $^tRR = S$ en choisissant $r_{i,i} > 0$ pour tout i. Cela donne $r_{1,1}^2 = 1$, donc $r_{1,1} = 1$ $r_{1,1}r_{1,2} = -1$ donc $r_{1,2} = -1$. De même, $r_{1,3} = 1$. $r_{2,2} = \sqrt{5-1} = 2$, $r_{2,3} = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$, $r_{3,3} = \sqrt{3-1-1} = 1$. Finalement

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *En déduire* $\det S$.

$\det S = (\det R)^2 = 4$.

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $A = {}^tRR$ sa décomposition de Cholesky. On note $A = (a_{i,j})$ et $R = (r_{i,j})$.

1. *Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $a_{i,i}$ en fonction des coefficients $r_{k,l}$ de R.*

$a_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_{k,i}^2 = \sum_{k=1}^{i} r_{k,i}^2$ puisque $r_{k,i} = 0$ quand $k > i$.

2. *Montrer que*

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

$$\det A = (\det R)^2 = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} r_{k,i}^2 \right) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad (1)$$

3. *Montrer qu'il y a égalité si et seulement si A est diagonale.*

Si A est diagonale, $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Réciproquement, si $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$, alors toutes les inégalités de (1) sont des égalités. En particulier, $\displaystyle\prod_{i=1}^n r_{i,i}^2 = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i r_{k,i}^2\right)$. Comme pour tout i, $r_{i,i}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^i r_{k,i}^2\right)$, si les produits sont égaux, c'est que pour tout i, $r_{i,i}^2 = \sum_{k=1}^i r_{k,i}^2$, ce qui montre que $r_{k,i} = 0$ dès que $k < i$. Ainsi, R est diagonale, donc $A = {}^tRR$ est diagonale.

Exercice 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|.$$

Pour montrer l'une des inégalités, on pourra utiliser $X = (x_j)$ où

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{i_0,j} = 0 \\ \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ sinon} \end{cases}$$

i_0 étant un entier judicieusement choisi.

Pour tout $X = (x_j) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et tout $i \in [[1, n]]$, la i-ème coordonnée de AX est $(AX)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. On considère X tel que $||X||_\infty = 1$

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq ||X||_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \max_k \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

Donc pour tout i, $|(AX)_i| \leq \max_k \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$, par conséquent, en prenant le maximum sur les i

$$||AX||_\infty \leq \max_k \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

cela montre que $|||A|||_\infty \leq \max_i \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Si $A = 0$, on déduit tout de suite l'égalité.

Montrons la seconde inégalité quand $A \neq 0$. Soit i_0 tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \max_i \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et soit X comme dans l'énoncé. $(AX)_{i_0} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$, donc $|||A|||_\infty \geq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \max_i \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(K)$. On suppose que pour tout $i \in [[1, n]]$, $a_{i,i} \neq 0$. Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On utilise la méthode de relaxation de paramètre $\omega > 0$ pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc

$$A_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$$

avec les notations du cours : $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$, $L = (l_{i,j})$, $U = (u_{i,j})$ de telle sorte que $l_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$ et 0 sinon, $u_{i,j} = a_{i,j}$ si $i < j$ et 0 sinon.

1. *Calculer $\chi_{A_\omega}(0)$.*

$$\chi_{A_\omega}(X) = \det(XI - (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U))$$

donc

$$\begin{aligned}\chi_{A_\omega}(0) &= \det(-(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)) \\ &= \det(-(D+\omega L)^{-1}\det(((1-\omega)D - \omega U)) \\ &= \det(-D)^{-1}\det(-D)(\omega-1)^n \\ &= (\omega-1)^n\end{aligned}$$

2. *Montrer que $\rho(A_\omega) \geq |\omega - 1|$ (on pourra faire une estimation du produit des valeurs propres de A_ω).*

Soient $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_ω. Alors $(-1)^n \prod_i \lambda_i = \chi_{A_\omega}(0) = (\omega-1)^n$. On en déduit que

$$|\omega - 1|^n = \prod_i |\lambda_i| \leq \rho(A_\omega)|^n$$

donc $|\omega - 1| \leq \rho(A_\omega)$.

3. *En déduire que si la méthode converge pour tout $X^{(0)}$, alors $0 < \omega < 2$.*

Si la méthode converge pour tout vecteur initial,

$$|\omega - 1| \leq \rho(A_\omega) < 1$$

donc $-1 < \omega - 1 < 1$, c'est-à-dire $0 < \omega < 2$.

Exercice 5

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc

$$G = -(D+L)^{-1}U$$

avec les notations du cours rappelées à l'exercice précédent. On veut montrer que cette méthode converge pour tout vecteur initial (ce résultat a été énoncé en cours mais n'a pas été démontré).

1. *Pourquoi la matrice D est-elle inversible ?*

Comme A est à diagonale strictement dominante, $|a_{i,i}| > 0$ pour tout i. Cela montre que D est inversible.

2. *On note $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$. Montrer que $G = -(I+L')^{-1}U'$.*

$(D+L)^{-1}U = (D(I+L'))^{-1}DU' = (I+L')^{-1}D^{-1}DU' = (I+L')^{-1}U'$.

3. *Soit χ_G le polynôme caractéristique de G. Montrer que*

$$\chi_G = \det(X(I+L') + U').$$

$$\begin{aligned}\chi_G &= \det(XI + (I+L')^{-1}U') \\ &= \det(I+L')^{-1}\det(X(I+L') + U') \\ &= \det(X(I+L') + U')\end{aligned}$$

4. *Soit λ une valeur propre de G. On suppose par l'absurde que $|\lambda| \geq 1$.*

a) *Montrer que pour tout* $k \in [[1,n]]$, $\sum_{j<k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| + \sum_{j>k} \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < |\lambda|$.

A est à diagonale strictement dominante donc pour tout k, $\sum_{j\neq k} \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < 1$ donc

$$\sum_{j\neq k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < |\lambda|$$

ce qui s'écrit aussi $\sum_{j<k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| + \sum_{j>k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < |\lambda|$. Si $\lambda \geq 1$, on obtient

$$\sum_{j<k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| + \sum_{j>k} \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| \leq \sum_{j<k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| + \sum_{j>k} |\lambda| \left|\frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}\right| < |\lambda|.$$

b) *En déduire que* $\det(\lambda(I+L') + U') \neq 0$

Cela montre que la matrice $\lambda(I+L')+U'$ est à diagonale strictement dominante, donc $\det(\lambda(I+L') + U') \neq 0$.

c) *Expliquer pourquoi ce résultat est contraire à l'hypothèse et conclure.*

Si $\det(\lambda(I+L') + U') \neq 0$, alors $\chi_G(\lambda) \neq 0$. C'est absurde car λ est une valeur propre de G. On en déduit que si λ est une valeur propre de G, alors $|\lambda| < 1$, donc $\rho(G) < 1$. Cela montre que la méthode converge pour tout vecteur initial.

Exercice 6

1. *Soit Q une matrice orthogonale. Rappeler pourquoi* $\det Q \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, ${}^tQQ = I$ donc $(\det Q)^2 = 1$ donc $\det Q \in \{-1, 1\}$.

2. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A = QM$ où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A et $M_1, \ldots, M_n$ les colonnes de M. Montrer que pour tout j, $||A_j||_2 = ||M_j||_2$ (où $||X||_2 = \sqrt{{}^tXX}$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$).* Pour tout j, $A_j = Ae_j = QMe_j = QM_j$ donc $||A_j||_2^2 = ||QM_j||_2^2 = {}^tM_j{}^tQQM_j = {}^tM_jM_j = ||M_j||_2^2$.

3. *Montrer que*

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}.$$

Dans le cas où A est inversible, on pourra utiliser la décomposition QR de A.

Si $\det A = 0$, l'inégalité est évidente.

Si $\det A \neq 0$, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

D'après la question 1, $|\det A| = |\det R|$. Si l'on note $R = (r_{i,j})$, $|\det A| \leq \prod_i r_{i,i}$. On note $R_1 \ldots, R_n$ les colonnes de R.

Pour tout j, $||A_j||_2 = ||R_j||_2$ d'après la question précédente. Or pour tout j,

$$r_{j,j} \leq \left(\sum_{i=1}^{j} r_{i,j}^2\right)^{1/2} = ||R_j||_2.$$

On en déduit que

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||R_j||_2 = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$$

Cela montre le résultat car pour tout j, $||A_j||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$.