université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Examen première session** **PARCOURS : LIMI 501** **Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 18/12/2018** **Heure : 14h30** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. En appliquant la méthode des coefficients indéterminés Déterminer la décomposition de Cholesky $S = {}^tRR$ (si elle existe).
2. En déduire $\det S$.

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $A = {}^tRR$ sa décomposition de Cholesky. On note $A = (a_{i,j})$ et $R = (r_{i,j})$.
1. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $a_{i,i}$ en fonction des coefficients $r_{k,l}$ de R.
2. Montrer que

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

3. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si A est diagonale.

Exercice 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|.$$

Pour montrer l'une des inégalités, on pourra utiliser $X = (x_j)$ où

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{i_0,j} = 0 \\ \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ sinon} \end{cases}$$

i_0 étant un entier judicieusement choisi.

Exercice 4

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. On suppose que pour tout $i \in [[1, n]]$, $a_{i,i} \neq 0$. Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On utilise la méthode de relaxation de paramètre $\omega > 0$ pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc

$$A_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$$

avec les notations du cours : $D = \text{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$, $L = (l_{i,j})$, $U = (u_{i,j})$ de telle sorte que $l_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$ et 0 sinon, $u_{i,j} = a_{i,j}$ si $i < j$ et 0 sinon.
1. Calculer $\chi_{A_\omega}(0)$ (où χ_{A_ω} désigne le polynôme caractéristique de A_ω).
2. Montrer que $\rho(A_\omega) \geq |\omega - 1|$ (on pourra considérer le produit des valeurs propres de A_ω).
3. En déduire que si la méthode converge pour tout $X^{(0)}$, alors $0 < \omega < 2$.

Exercice 5

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilise la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre $AX = B$. La matrice d'itération correspondante est donc

$$G = -(D + L)^{-1}U$$

avec les notations du cours rappelées à l'exercice précédent. On veut montrer que cette méthode converge pour tout vecteur initial (ce résultat a été énoncé en cours mais n'a pas été démontré).
1. Pourquoi la matrice D est-elle inversible ?
2. On note $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$. Montrer que $G = -(I + L')^{-1}U'$.
3. Soit χ_G le polynôme caractéristique de G. Montrer que

$$\chi_G = \det(X(I + L') + U').$$

4. Soit λ une valeur propre de G. On suppose par l'absurde que $|\lambda| \geq 1$.
a) Montrer que pour tout $k \in [[1, n]]$,

$$\sum_{j<k} |\lambda| \left| \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}} \right| + \sum_{j>k} \left| \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}} \right| < |\lambda|.$$

b) En déduire que $\det(\lambda(I + L') + U') \neq 0$.
c) Expliquer pourquoi ce résultat est contraire à l'hypothèse et conclure.

Exercice 6

1. Soit Q une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Rappeler pourquoi $\det Q \in \{-1, 1\}$.
2. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A = QM$ où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A et $M_1, \ldots, M_n$ les colonnes de M. Montrer que pour tout j, $||A_j||_2 = ||M_j||_2$ (où $||X||_2 = \sqrt{{}^tXX}$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$).
3. Montrer que

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

(dans le cas où A est inversible, on pourra utiliser la décomposition QR de A).