Université de Bordeaux **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Licences math-info et CMI Année 2019–2020

Corrigé du devoir surveillé, 8 novembre 2019
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – [Décomposition $A = PLU$]

1) Si l'on applique l'algorithme du cours, on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\det A = (\det P)(\det U) = 14$.

Exercice 2 – [À propos des matrices triangulaires]

1) $(A_\Delta)_{i,j} = d_i^{-1} d_j a_{i,j}$.

2) Si $i > j$, $(A_{\Delta_\varepsilon})_{i,j} = 0$. Si $i < j$, $(A_{\Delta_\varepsilon})_{i,j} = \varepsilon^{j-i} a_{i,j}$, donc $\lim_{\varepsilon \to 0} (A_{\Delta_\varepsilon})_{i,j} = 0$. Pour tout i, $(A_{\Delta_\varepsilon})_{i,i} = a_{i,i}$. On conclut que $\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\Delta_\varepsilon} = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$.

Exercice 3 – [Orthonormalisation, projection orthogonale]

1) Calculons d'abord l'orthogonalisée où la matrice de passage à ses coefficients diagonaux égaux à 1. $f_1^* = f_1$ et $f_2^* = f_2 - \dfrac{(f_2|f_1^*)}{(f_1^*|f_1^*)} f_1^* = f_2 - f_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule maintenant l'orthonormalisée (f_1', f_2') en divisant f_1^* et f_2^* par leur norme. On trouve

$$f_1' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) On note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

$$p(x) = (x|f_1')f_1' + (x|f_2')f_2' = \frac{1}{2} f_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2' = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Comme (f_1', f_2') est une base orthonormée de F et que les coordonnées de $p(x)$ dans cette base sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, on trouve tout de suite $||p(x)|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Première méthode pour $d(x, F)$. Soient $x' = p(x)$ et $x'' = x - p(x)$. Alors $x'' \in F^\perp$ et $||x||^2 = ||x' + x''||^2 = ||x'||^2 + ||x''||^2$ puisque $(x'|x'') = 0$ (c'est le théorème de Pythagore). Par conséquent, $d(x, F)^2 = ||x - x'||^2 = ||x''||^2 = ||x||^2 - ||x'||^2 = 1 - 3/4 = 1/4$. Conclusion : $d(x, f) = 1/2$.

Seconde méthode. On calcule $x'' = x - p(x) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$. Sa norme vaut $\dfrac{1}{2}$, donc $d(x, F) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 – [Matrices de Gram, distance à un sous-espace]

1) Voir le cours.

2)

$$\det \mathrm{Gram}(x, f_1, \dots, f_r) = \begin{vmatrix} (x|x) & (x|f_1) & \dots & (x|f_r) \\ (f_1|x) & (f_1|f_1) & \dots & (f_1|f_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_r|x) & (f_r|f_1) & \dots & (f_r|f_r) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (x' + x''|x' + x'') & (x' + x''|f_1) & \dots & (x' + x''|f_r) \\ (f_1|x' + x'') & (f_1|f_1) & \dots & (f_1|f_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_r|x' + x'') & (f_r|f_1) & \dots & (f_r|f_r) \end{vmatrix}$$

Or $x'' \in F^\perp$, donc pour tout i, $(x'+x''|f_i) = (x'|f_i)+(x''|f_i) = (x'|f_i)$ puisque les f_i appartiennent à F. De plus, comme $(x'|x'') = 0$, $(x'+x''|x'+x'') = (x'|x')+(x''|x'')$. On obtient donc

$$\det \mathrm{Gram}(x, f_1, \dots, f_r) = \begin{vmatrix} (x'|x') + (x''|x'') & (x'|f_1) & \dots & (x'|f_r) \\ (f_1|x') & (f_1|f_1) & \dots & (f_1|f_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_r|x') & (f_r|f_1) & \dots & (f_r|f_r) \end{vmatrix}$$

Le résultat provient alors du fait que

$$\begin{pmatrix} (x'|x') + (x''|x'') \\ (f_1|x') \\ \vdots \\ (f_r|x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'|x') \\ (f_1|x') \\ \vdots \\ (f_r|x') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x''|x'') \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $D_1 = \det \mathrm{Gram}(x', f_1, \dots, f_r) = 0$ puisque la famille $(x', f_1, \dots, f_r)$ est liée. De plus, $D_2 = (x''|x'') \det \mathrm{Gram}(f_1, \dots, f_r)$. Comme $d(x, F) = (x''|x'')$, on en déduit le résultat.

4) On trouve
$$d(x,F)=\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\1&4&4\\2&4&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&4\\4&6\end{vmatrix}}}=\frac{1}{2}$$