université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Examen première session** **PARCOURS : LIMI 501** **Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 16/12/2019** **Heure : 14h30** **Durée : 3h** **Corrigé**	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

1. Soient $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. La factorisation de Cholesky de S est $S = {}^tRR$.
2. $\det S = (\det R)^2 = 4$.

Exercice 2

1. $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$.

2. Pour tout i, $|y_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ puisque $||x||_\infty = 1$ donc $|x_i| \leq 1$ pour tout i. On en déduit que pour tout i, $|y_i| \leq \mathcal{M}$ donc $||Y||_\infty \leq \mathcal{M}$.
3. D'après la question précédente, $||AX||_\infty \leq \mathcal{M}$ pour tout X tel que $||X||_\infty = 1$. On en déduit que $|||A|||_\infty = \sup_{||X||_\infty=1} ||AX||_\infty \leq \mathcal{M}$.

4. $|||A|||_\infty \geq \mathcal{M}$ Soit i_0 tel que $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \mathcal{M}$, soit X_0 dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ dont la j-ème coordonnée est $x_j = 0$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $x_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon. Alors la i_0-ème coordonnée de AX_0 est $(AX_0)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$, donc $||AX_0||_\infty \geq \mathcal{M}$, ce qui montre que $|||A|||_\infty \geq \mathcal{M}$.

Exercice 3
1. Comme $\mathcal{N}(\alpha A) = |\alpha|\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{N}((\alpha A)^{-1}) = |\alpha|^{-1}\mathcal{N}(A^{-1})$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.
2. On suppose que $\mathcal{N}$ est la norme subordonnée à $||\cdot||$. $\mathcal{N}(I) = \sup_{||X||=1} ||IX|| = 1$. Alors $1 = \mathcal{N}(I) = \mathcal{N}(A.A^{-1}) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$.
3. Comme $AX = B$ et $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$, $A\Delta X = \Delta B$. Alors $\Delta X = A^{-1}\Delta B$ et donc $||\Delta X|| \leq |||A^{-1}||| \cdot ||\Delta B||$. De plus, comme $AX = B$, $||B|| \leq |||A||| \cdot ||X||$. En combinant ces résultats, on obtient

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leq \text{cond}(A)\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

Exercice 4

1. a) $J = -\begin{pmatrix} 0 & a^{-1} & 0 \\ a^{-1} & 0 & a^{-1} \\ 0 & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ On calcule $\chi_J = X(X^2 - 2a^{-2})$ donc $\rho(J) = a^{-1}\sqrt{2}$.

b) La méthode converge pour tout vecteur initial si et seulement si $\rho(J) < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $a > \sqrt{2}$.

2. a) $b_{i,i} = 1 - \omega$. Si $i \neq j$, $b_{i,j} = \omega \dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$

b) On suppose que $\omega \in]0, 1]$. Pour tout i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| = |1 - \omega| + \sum_{j \neq i} \omega \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| < 1 - \omega + \omega = 1$.

On a utilisé les deux faits suivants : $|1 - \omega| = 1 - \omega$ et comme A est à diagonale strictement dominante, $\displaystyle\sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| < 1$. Comme on sait que $\rho(J) \leq \max_i \sum_j |b_{i,j}|$, cela montre que $\rho(J) < 1$ donc la méthode converge pour tout vecteur initial.

Exercice 5

1. Comme $MM^{-1} = I$, ${}^t(M^{-1})({}^tM) = I$ donc $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.

2. Voir les TD.

3. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$. Donc $A+B$ est symétrique. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$.

4. D'abord, ${}^t({}^tR^{-1}BR^{-1}) = {}^tR^{-1}BR^{-1}$ donc ${}^tR^{-1}BR^{-1}$ est symétrique. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCX = {}^tX{}^tR^{-1}BR^{-1}X = {}^t(R^{-1}X)B(R^{-1}X) \geq 0$.

5. Si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $\det(I_n + D) = \prod_{i=1}^n (1 + d_i) = 1 + \prod_{i=1}^n d_i + s$ où s est une somme de produits positifs ou nuls $d_{i_1} \ldots d_{i_k}$ (où $k \geq 2$). On en déduit le résultat.

6. Comme C est symétrique réelle, il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale D telles que ${}^tUCU = D$. Comme C est positives, les coefficients diagonaux de D sont positifs. Donc d'après la question précédente, $\det(I_n + C) = \det(I_n + D) \geq 1 + \det(D) = 1 + \det C$.

7. $B = {}^tRCR$ et $A = {}^tRR$. Alors $\det(A + B) = (\det R)^2 \det(I + C) \geq (\det R)^2(1 + \det C) = \det A + \det B$.

8. a) A_k est clairement symétrique. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^tX\left(A + \dfrac{1}{k}\right)X = {}^tXAX + \dfrac{1}{k}{}^tXX > 0$.

b) $|||A_k - A|||_\infty = \dfrac{1}{k}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

c) D'après les questions précédentes, pour tout k, $\det(A_k + B) \geq \det A_k + \det B$. Par continuité du déterminant, $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.