Université de Bordeaux **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Licences math-info et CMI Année 2019–2020

Devoir Surveillé, 8 novembre 2019
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – [Décomposition $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre l'équation $AX = B$ et écrire A sous la forme $A = PLU$.

2) En utilisant le résultat précédent, calculer $\det A$.

Exercice 2 – [Orthonormalisation, projection orthogonale]
Rappel. *Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$. Soient $(b_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de E et $(b_i^*)_{i\in[[1,n]]}$ l'orthogonalisée de Gram Schmidt de la base (b_i) telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de (b_i) à (b_i^*) sont égaux à 1. Alors pour tout $j \in [[1,n]]$,*

$$b_j^* = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(b_j|b_i^*)}{(b_i^*|b_i^*)} b_i^*$$

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le produit scalaire défini par $(x|y) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ (pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$).

Soient $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (2,1,0,1)$ et $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

1) Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (f_1, f_2) de F.

2) On note p la projection orthogonale sur F.
Soit $x = (1,0,0,0)$. Déterminer $p(x)$ puis calculer $d(x, F)$ (où d est la distance associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$).

Exercice 3 – [Matrices de Gram, distance à un sous-espace]
Soit $E, (\cdot|\cdot)$ un espace euclidien. On note d la distance associée au produit scalaire. Pour toute famille $g = (g_1, \dots, g_r)$ d'éléments de E, on note $\mathrm{Gram}(g_1, \dots, g_r)$ la matrice de Gram de g.

On rappelle le résultat du cours suivant.

(i) Si g est liée, alors $\det \mathrm{Gram}(g_1, \dots, g_r) = 0$.

(ii) Si g est libre, alors $\det \mathrm{Gram}(g_1, \dots, g_r) > 0$.

1) Rappeler la preuve du (i).

2) Soient $f = (f_1, \dots, f_r)$ une famille libre d'éléments de E, $F = \mathrm{Vect}(f)$ et x un élément quelconque de E. On note $x = x' + x''$ où $x' \in F$ et $x'' \in F^\perp$. Montrer que $\det \mathrm{Gram}(x, f_1, \dots, f_r) = D_1 + D_2$ où

$$D_1 = \begin{vmatrix} (x'|x') & (x'|f_1) & \dots & (x'|f_r) \\ (f_1|x') & (f_1|f_1) & \dots & (f_1|f_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (f_r|x') & (f_r|f_1) & \dots & (f_r|f_r) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} (x''|x'') & (x'|f_1) & \dots & (x'|f_r) \\ 0 & (f_1|f_1) & \dots & (f_1|f_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (f_r|f_1) & \dots & (f_r|f_r) \end{vmatrix}$$

Indication. On rappelle que si $A, B, C_1, \dots, C_{m-1}$ sont des éléments de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire des vecteurs colonnes de taille m), alors $\det(A + B|C_1| \dots |C_{m-1}) = \det(A|C_1| \dots |C_{m-1}) + \det(B|C_1| \dots |C_{m-1})$.

3) Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det \mathrm{Gram}(x, f_1, \dots, f_r)}{\det \mathrm{Gram}(f_1, \dots, f_r)}}$$

4) À l'aide de ce résultat, retrouver la distance $d(x, F)$ de l'exercice 2, question 2.

Exercice 4 – [Matrices symétriques définies positives]

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il a été vu en cours que A peut s'écrire $A = {}^tRR$ où $R = (r_{i,j}) \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que R est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs).

1) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $a_{i,i}$ en fonction des coefficients $r_{k,l}$ de R.

2) En déduire que

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

3) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si A est diagonale.