université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 20120/2021** **Examen première session** **PARCOURS : LIMI 501** **Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 17/12/2020** **Heure : 9h** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Barème indicatif : exercice 1 : 2, exercice 2 : 4, exercice 3 : 3, exercice 4 : 4, exercice 5 : 7.

Exercice 1

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que S est définie positive.

2. En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, calculer la factorisation de Cholesky de S.

3. En déduire la factorisation de S sous la forme $S = {}^tUDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,3}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale.

Correction.

1. Somme S est réelle symétrique, on sait que ses valeurs propres sont réelles (théorème de décomposition spectrale). D'après le rappel, elle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

Or d'après le théorème de Gershgorin-Hadamard, $\mathrm{Spec}(S) \subset \mathcal{B}_F(3,3)$. Donc $\mathrm{Spec}(S) \subset \mathcal{B}_F(3,2) \cap \mathbb{R} = [1,5]$. Cela montre bien que les valeurs propres de S sont strictement positives.

2. Comme $S \in \mathrm{Sym}_2^{++}(\mathbb{R})$ il existe $R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^{++}_{sup,3}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tRR = S$.

Or ${}^tRR = \begin{pmatrix} r_{1,1}^2 & r_{1,1}r_{1,2} & r_{1,1}r_{1,3} \\ r_{1,2}r_{1,1} & r_{2,2}^2 + r_{1,2}^2 & r_{1,2}r_{1,3} + r_{2,2}r_{2,3} \\ r_{1,3}r_{1,1} & r_{1,2}r_{1,3} + r_{2,2}r_{2,3} & r_{1,3}^2 + r_{2,3}^2 + r_{3,3}^2 \end{pmatrix}$. Donc ${}^tRR = S$ si et seulement si les conditions suivantes sont réalisés.

$r_{1,1}^2 = 3$, $r_{1,1}r_{1,2} = -1$, $r_{1,1}r_{1,3} = 0$, $r_{2,2}^2 + r_{1,2}^2 = 3$, $r_{1,2}r_{1,3} + r_{2,2}r_{2,3} = -1$, $r_{1,3}^2 + r_{2,3}^2 + r_{3,3}^2 = 3$.

Si l'on tient compte de la contrainte $r_{i,i} > 0$ pour tout i, c'est équivalent à :

$$\begin{cases} r_{1,1} = \sqrt{3}\ ,\ r_{1,2} = -1/\sqrt{3}\ ,\ r_{1,3} = 0 \\ r_{2,2} = \sqrt{3 - 1/3} = \sqrt{8/3} \\ r_{2,3} = -1/r_{2,2} = -\sqrt{3/8} \\ r_{3,3} = \sqrt{3 - 3/8} = \sqrt{21/8} \end{cases}$$

Ainsi, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{8/3} & -\sqrt{3/8} \\ 0 & 0 & \sqrt{21/8} \end{pmatrix}$.

3. Soient $\Delta = \text{diag}(\sqrt{3}, \sqrt{8/3}, \sqrt{21/8})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $R = \Delta U$ donc ${}^tRR = {}^tU\Delta^2 U$. Soit $D = \Delta^2 = \text{diag}(3, 8/3, 21/8)$. On obtient $S = {}^tUDU$.

Exercice 2

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. et $X = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On rappelle que la norme $||\cdot||_1$ est définie par $||X||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$ et on note $|||\cdot|||_1$ la norme de $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $||\cdot||_1$.

Cet exercice vise à établir l'égalité suivante (vue en cours et TD) : $|||A|||_1 = \displaystyle\max_{j\in[[1,n]]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

On pose $\mathcal{M} = \displaystyle\max_{j\in[[1,n]]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. On va donc démontrer que $|||A|||_1 = \mathcal{M}$.

1. Pour tout $i \in [[1, n]]$, exprimer $(AX)_i$ en fonction des coefficients de A et de X.
2. Montrer que si $||X||_1 = 1$, alors $||AX||_1 \leq \mathcal{M}$.
3. En déduire que $|||A|||_1 \leq \mathcal{M}$.
4. Montrer enfin que $|||A|||_1 \geq \mathcal{M}$ (pour cela, trouver un élément X tel que $||X||_1 = 1$ et $||AX||_1 \geq 1$).

Correction.
1. Si $X = (x_i)_{i\in[[1,n]]}$, $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$.
2. On suppose que $||X||_1 = 1$.

$$\begin{aligned} ||AX||_1 = \sum_{i=1}^n |(AX)_i| &= \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \\ &\leq \mathcal{M} \sum_{j=1}^n |x_j| = \mathcal{M} \end{aligned}$$

puisque pour tout j, $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq \mathcal{M}$ et puisque $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$.
3. On en déduit que pour tout X tel que $||X||_1 = 1$, $||AX||_1 \leq \mathcal{M}$. Ce réel $\mathcal{M}$ est donc un majorant de $\{||AX||_1 \ : \ X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } ||X||_1 = 1\}$. Il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble.

$$\sup_{||X||_1=1} ||AX||_1 \leq \mathcal{M}$$

Autrement dit,

$$|||A|||_1 \leq \mathcal{M}$$

4. Soit k tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \max_{j\in[[1,n]]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. Il est clair que $||e_k|| = 1$. De plus, Ae_k est la k-ème colonne de A donc

$$||Ae_k||_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \mathcal{M}$$

Ainsi,
$$\sup_{||X||_1=1} ||AX||_1 \geq \mathcal{M}$$
Autrement dit
$$|||A|||_1 \geq \mathcal{M}$$
d'où l'égalité.

Exercice 3

Soient a un réel, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que les suites d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel (pour la résolution d'une équation $AX = B$) sont respectivement $X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B$ et $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}B$, avec les notations du cours.
1. Discuter en fonction de a la convergence pour tout $X^{(0)}$ de la méthode de Jacobi.
2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Correction.

1.Soit $J = -D^{-1}(L+U)$ la matrice d'itération de Jacobi. $J = -\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_J = X(X^2 - 2a^2)$, donc $\mathrm{Spec}(J) = \{0, \sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\}$. On obtient $\rho(J) = \sqrt{2}|a|$. La méthode converge pour tout vecteur initial si et seulement si $\rho(J) < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $|a| < 1/\sqrt{2}$.

2.Soit $G = -(D+L)^{-1}U$ la matrice d'itération de Gauss Seidel. $D + L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $(D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}$ et enfin $G = -(D+L)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & a \\ 0 & a^3 & -a^2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $\chi_G = X^2(X - 2a^2)$ donc $\rho(G) = 2a^2$. La méthode converge pour tout vecteur initial si et seulement si $|a| < 1/\sqrt{2}$.

Exercice 4 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1. Soit
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$
C'est-à-dire que $s_{i,j} = 2$ si $i = j \geq 2$ et $s_{i,j} = 1$ sinon. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit q la forme quadratique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $q(X) = {}^tXSX$. Appliquer à q l'algorithme de Gauss de décomposition en combinaison linéaire de carrés.
2. En déduire une matrice $U \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tUU$.

Correction.

1.

$$\begin{aligned} q(X) &= x_1^2 + 2x^2 + \cdots + 2x_n^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \end{aligned}$$

1. Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient que $S = {}^tUU$.

Exercice 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que $(X|Y) = {}^tXY$, et de la norme $||\cdot||_2$ défini par ce produit scalaire. Pour tout j, on note A_j la j-ème colonne de A. Dans cet exercice, on utilise la dÃ©composition de Cholesky pour démontrer l'inégalité de Hadamard $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$ et de décrire les cas d'égalité.

1. Établir l'inégalité lorsque $\det A = 0$.

2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.

On sait donc que ${}^tAA$ admet une factorisation de Cholesky : il existe $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = {}^tRR$.

Pour tout j, on note R_j la j-ème colonne de R. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on note $r_{i,j}$ le coefficient (i,j) de R.

b) Montrer que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n ||R_j||_2$.

c) En déduire que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$.

d) Montrer que $|\det A| = \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$ si et seulement si ${}^tAA$ est diagonale.

e) En déduire que $|\det A| = \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$ si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

3. On ne suppose plus que A est inversible. Montrer que $|\det A| = \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$ si et seulement si soit l'une des colonnes de A est nulle, soit les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

Correction.

1. Si $\det A = 0$, comme $||A_j||_2 \geq 0$ pour tout j, $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n ||A_j||_2$.

2. a) ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$, donc ${}^tAA$ est symétrique.

De plus, si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = ||AX||_2^2 > 0$, donc ${}^tAA$ est symétrique définie positive. Cela montre que cette matrice admet une décomposition de Cholesky. Il existe $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = {}^tRR$.

b) Comme ${}^tAA = {}^tRR$, $(\det A)^2 = (\det R)^2$. Or $\det R = \prod_{j=1}^{n} r_{j,j}$ et pour tout j, $||R_j||_2^2 = \sum_{i=1}^{j} r_{i,j}^2 \geq r_{j,j}^2$ donc pour tout j, $||R_j||_2 \geq r_{j,j}$ et $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||R_j||_2$.

c) Pour tout j, $||A_j||_2^2 = ({}^tAA)_{j,j} = ({}^tRR)_{j,j} = ||R_j||_2^2$. L'inégalité du c) permet donc d'obtenir $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$. C'est l'inégalité de Hadamard.

d) L'égalité est vérifiée si et seulement si pour tout j, $\sum_{i=1}^{j} r_{i,j}^2 = r_{j,j}^2$, c'est-à-dire si et seulement si $r_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$, c'est-à-dire si et seulement si R est diagonale (puisque comme R est triangulaire supérieure, $r_{i,j} = 0$ dès que $i > j$). Dans ce cas, ${}^tAA = {}^tRR$ est diagonale.

Réciproquement, si ${}^tAA$ est diagonale, alors ${}^tAA = \operatorname{diag}(||A_1||_2, \ldots, ||A_n||_2)$ et donc $(\det A)^2 = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2^2$, ce qui donne $|\det A| = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$

e) Comme $({}^tAA)_{i,j} = {}^tA_iA_j$, ${}^tAA$ est diagonale si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

3. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors $\det A = 0 = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$. Sinon, et si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales, alors ces colonnes forment une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\det A \neq 0$ et la question 3 montre l'égalité.

Réciproquement, si l'égalité est vérifiée, et si aucune des colonnes de A n'est nulle, c'est que $\det A \neq 0$ et la question 3 montre que les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.