Université de Bordeaux — **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**

Licences math-info et CMI — Année 2020–2021

Correction du DM 1

Exercice 1 – [Orthogonalisation de Gram-Schmidt]

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par $(x|y) = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ (où $x = (x_i)_{i\in[[1,4]]}$ et $y = (y_i)_{i\in[[1,4]]}$). Soient $b_1 = (1,-1,1,-1)$ et $b_2 = (1,-2,0,1)$.

1) Montrer que $b = (b_1, b_2)$ est une famille libre de E.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par b_1 et b_2 (donc (b_1, b_2) est une base de F.

2) Déterminer l'orthogonalisée de Gram-Schmidt $b^* = (b_1^*, b_2^*)$ de b de type 1 dans le théorème 4.3.5 du cours (c'est-à-dire telle que la matrice de passage de b à b^* appartiennent à $\mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$). On pourra pour cela utiliser le 1 de l'algorithme 4.3.6.

3) En déduire l'orthonormalisée de Gram-Schmidt $b' = (b'_1, b'_2)$ de b.

4) Soit $x = (1,0,0,0)$. En utilisant la proposition 4.3.9, calculer $p(x)$.

Correction.

1) On suppose que $\alpha b_1 + \beta b_2 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\alpha = \beta = 0$. Cela montre que la famille est libre.

Autre méthode. La famille (b_1, b_2) est libre si et seulement si elle est de rang 2 (c'est-à-dire card$\{b_1, b_2\}$). Elle est donc libre si et seulement si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

ce qui est vrai si et seulement si cette matrice a une sous-matrice de taille 2×2 de déterminant non nul. Par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

2) D'abord, $b_1^* = b_1$. Puis on calcule b_2^*.

$$\begin{aligned} b_2^* &= b_2 - \frac{(b_2|b_1^*)}{(b_1^*|b_1^*)} b_1^* \\ &= b_2 - \frac{1}{2} b_1^* \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Conseil. Bien vérifier que $(b_1^*|b_2^*) = 0$.
3) On calcule $||b_1^*|| = \sqrt{4} = 2$ donc

$$b_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

$b_2^* = \frac{1}{2}(1, -3, -1, 3)$ et $||(1, -3, -1, 3)|| = 2\sqrt{5}$ donc

$$b_2' = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{-3}{2\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}} \right)$$

4)

$$\begin{aligned} p(x) &= (x|b_1')b_1' + (x|b_2')b_2' \\ &= \frac{1}{2} b_1' + \frac{1}{2\sqrt{5}} b'2 \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4} \right) + \left(\frac{1}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-1}{20}, \frac{3}{20} \right) \\ &= \left(\frac{3}{10}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{10} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2 – [DISTANCE À UN SOUS-ESPACE]
Soit E un espace euclidien de produit scalaire associé $(\cdot|\cdot)$. Soient $|| \cdot ||$ et d la norme euclidienne et la distance associées.

Soient F un sous espace vectoriel de E. On note comme dans le cours

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \ : \ y \in F\}$$

On souhaite démontrer la proposition du cours suivante.

Proposition 4.3.13. *Soient F un sous espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Alors pour tout $x \in E$, $d(x, F) = d(x, p(x))$.*

De plus, si $y \neq p(x)$, $d(x, y) > d(x, F)$. Soit donc x un élément de E. On rappelle que comme $E = F \oplus F^{\perp}$, x s'écrit de façon unique $x = a + b$ où $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$. Alors par définition, $p(x) = a$.

1) Justifier que $x - p(x)$ appartient à $F^{\perp}$.

2) Soit $y \in F$. Montrer que

$$||x - y||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2$$

3) En déduire le résultat.
Indication. Montrer les deux inégalités $d(x, p(x)) \leqslant d(x, F)$ et $d(F, x) \leqslant d(p(x), x)$. Cela démontrera l'égalité $d(x, F) = d(x, p(x))$.

4) Dans l'exemple de l'exercice 1, calculer $d(x, F)$.

Correction.
1) $x = a + b$ où $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$ et $p(x) = a$. Donc $x - p(x) = x - a = b \in F^{\perp}$.
2) Comme $y \in F$ et $p(x) \in F$, et comme F est un sous-espace vectoriel, $p(x) - y$ appartient à F. Comme $x - p(x)$ appartient à $F^{\perp}$, c'est que

$$(x - p(x)|p(x) - y) = 0$$

Comme $x - y = (x - p(x)) + (p(x) - y)$ et en utilisant le théorème de Pythagore, on en déduit que

$$||x - y||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2$$

3) Soit $y \in F$. D'après la question 2),

$$\begin{aligned} ||x - y||^2 &= ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2 \\ &\geqslant ||x - p(x)||^2 \end{aligned}$$

puisque $||p(x) - y||^2 \geqslant 0$.

Puisque les normes sont des nombres positifs, l'inégalité $||x-y||^2 \geqslant ||x-p(x)||^2$ permet de déduire que $||x - y|| \geqslant ||x - p(x)||$ en prenant la racine carrée, c'est-à-dire $d(x, y) \geqslant d(x, p(x))$. Donc $d(x, p(x))$ est un minorant de $\mathcal{D} = \{d(x, y) \ : y \in F\}$. Comme $d(x, F)$ est par définition le plus grand des minorants de cet ensemble, on conclut que $d(x, p(x)) \leqslant d(x, F)$ (propriété 2 dans la définition 4.3.13).

Comme $p(x) \in F$, c'est que $d(x, p(x)) \in \mathcal{D}$ donc $d(x, p(x)) \geqslant \inf \mathcal{D}$ (propriété 1 dans la définition 4.3.13). C'est-à-dire $d(x, p(x)) \leqslant \inf\{d(x, y) \ : y \in F\} = d(x, F)$.

Les inégalités $d(x, p(x)) \leqslant d(x, F)$ et $d(x, p(x)) \geqslant d(x, F)$ montrent que $d(x, p(x)) = d(x, F)$.

Si $y \neq p(x)$, $||p(x) - y|| > 0$. Or d'après la question 2), $||x - y||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2$. On en déduit que $||x - y||^2 > ||x - p(x)||^2$. Comme les normes sont des nombres positifs, on en déduit en prenant la racine carrée que $||x - y|| > ||x - p(x)||$, c'est-à-dire

$$d(x, y) > d(x, p(x))$$

4) Dans cet exemple, $x = (1,0,0,0)$ et $p(x) = \left(\frac{3}{10}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{10}\right)$, donc $d(x,F) = ||x - p(x)|| = \left|\left|\left(\frac{7}{10}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{10}\right)\right|\right|$. On trouve $d(x,F) = \frac{1}{10}\sqrt{49+16+4+1} = \frac{\sqrt{70}}{10} = \sqrt{\frac{7}{10}}$.