Université de Bordeaux — **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Licences math-info et CMI — Année 2020–2021

Devoir à la maison numéro 1, à rendre le 14 octobre 2020

Exercice 1 – [Orthogonalisation de Gram-Schmidt]
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par $(x|y) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ (où $x = (x_i)_{i\in[[1,4]]}$ et $y = (y_i)_{i\in[[1,4]]}$). Soient $b_1 = (1, -1, 1, -1)$ et $b_2 = (1, -2, 0, 1)$.

1) Montrer que $b = (b_1, b_2)$ est une famille libre de E.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par b_1 et b_2 (donc (b_1, b_2) est une base de F).

2) Déterminer l'orthogonalisée de Gram-Schmidt $b^* = (b_1^*, b_2^*)$ de b de type 1, suivant le théorème 4.3.5 du cours (c'est-à-dire telle que la matrice de passage de b à b^* appartiennent à $\mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$). On pourra pour cela utiliser le 1 de l'algorithme 4.3.6.

3) En déduire l'orthonormalisée de Gram-Schmidt $b' = (b'_1, b'_2)$ de b.

4) Soit $x = (1, 0, 0, 0)$. En utilisant la proposition 4.3.9, calculer $p(x)$.

Exercice 2 – [Distance à un sous-espace]
Soit E un espace euclidien de produit scalaire associé $(\cdot|\cdot)$. Soient $||\cdot||$ et d la norme euclidienne et la distance associées.

Soient F un sous espace vectoriel de E. On note comme dans le cours

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \ : \ y \in F\}$$

On souhaite démontrer la proposition du cours suivante.

Proposition 4.3.15. *Soient F un sous espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Alors pour tout $x \in E$, $d(x, F) = d(x, p(x))$.*

De plus, si $y \neq p(x)$, $d(x, y) > d(x, F)$.

Soit donc x un élément de E. On rappelle que comme $E = F \oplus F^{\perp}$, x s'écrit de façon unique $x = a + b$ où $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$. Alors par définition, $p(x) = a$.

1) Justifier pourquoi $x - p(x)$ appartient à $F^{\perp}$.

2) Soit $y \in F$. Montrer que $||x - y||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2$

3) En déduire la proposition.
Indication. Montrer les deux inégalités $d(x, p(x)) \leqslant d(x, F)$ et $d(F, x) \leqslant d(p(x), x)$. Cela démontrera l'égalité $d(x, F) = d(x, p(x))$.

4) Dans l'exemple de l'exercice 1, calculer $d(x, F)$.