Université de Bordeaux
Licences math-info et CMI

Licence 3 - Algorithmique algébrique 2
Année 2020–2021

Devoir à la maison, 4 novembre 2020
Durée 1h30.

Barème indicatif. Exercice 1 : 4, exercice 2 : 7, exercice 3 : 9.

Exercice 1 – [Décomposition $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) *Résoudre l'équation $AX = B$ et écrire A sous la forme $A = PLU$.*

2) En utilisant le résultat précédent, calculer $\det A$.

Correction.
1) On dispose les calculs comme dans le cours

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ (\mathbf{2}) & 0 & -3 \\ (\mathbf{-1}) & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1 \end{array}$$

Les coefficients entre parenthèses et en rouge remplacent des 0 dans la nouvelle matrice. Ce sont les opposés des multiplicateurs, c'est-à-dire les coefficients de la matrice L. Puis on continue

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ (\mathbf{-1}) & 1 & 4 \\ (\mathbf{2}) & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad l_2 \longleftrightarrow l_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ (\mathbf{-1}) & 1 & 4 \\ (\mathbf{2}) & (\mathbf{0}) & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On retrouve la matrices U en haut à droite et la matrice L formée d'une diagonale de 1 et de la partie inférieure gauche (en rouge et entre parenthèses).

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P = P_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, l'équation $AX = B$ devient

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad\quad -3x_3 = -3 \end{cases}$$

Ce qui donne comme unique solution

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\det P_{(1,2)} = \epsilon((1,2)) = -1$ donc $\det A = \det P \det U = 6$.

Exercice 2 – [Orthogonalisation, distance à un sous-espace]
Rappel. *Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$. Soient $(b_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de E et $(b_i^*)_{i\in[[1,n]]}$ l'orthogonalisée de Gram Schmidt de la base (b_i) telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de (b_i) à (b_i^*) sont égaux à 1. Alors pour tout $j \in [[1,n]]$,*

$$b_j^* = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(b_j|b_i^*)}{(b_i^*|b_i^*)} b_i^*$$

Dans $E = \mathbb{R}[X]_n$ (l'ensembles des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n), on considère le produit scalaire défini par

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

On note respectivement $||\cdot||$ et d la norme et la distance définies par ce produit scalaire.
Attention. Les bornes de l'intégrale sont bien -1 et 1.

1) Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(P_i)_{i=0}^{n}$ de $\mathbb{R}[X]_n$ telle que pour tout $i \in [[0,n]]$, P_i soit unitaire de degré i.

2) Calculer les polynômes P_i lorsque $n = 2$.

3) Montrer que $||P_n||^2 = (P_n|X^n)$.

4) On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_{n-1}$ de $\mathbb{R}[X]_n$. Montrer que

$$d(X^n, \mathbb{R}[X]_{n-1}) = ||P_n||$$

5) Calculer $d(X^2, \mathbb{R}[X]_1)$.

Correction.

1) Soit $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]_n$. Pour tout i, le polynôme P_i est unitaire de degré i si et seulement si il existe une famille de réels $(a_{i,j})_{0\leqslant i<j\leqslant n}$ telle que

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X + a_{0,1} \\ P_2 = X^2 + a_{1,2}X + a_{0,2} \\ \quad\vdots \\ P_n = X^n + a_{n-1,n}X^{n-1} + \cdots + a_{1,n}X + a_{0,n} \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si (P_i) est l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base $b = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de type 1, c'est-à-dire telle que la matrice de passage de b à (P_i) appartient à $\mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$. On a vu qu'une telle base existe et est unique.

2) Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on calcule

$$(X^i|X^j) = \int_{-1}^{1} t^{i+j}dt = \left[\frac{1}{i+j+1}t^{i+j+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{2}{i+j+1} \text{ si } i+j \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$$

D'abord, $P_0 = 1$.

$$P_1 = X - \frac{(X|P_0)}{(P_0|P_0)}P_0 = X$$

puisque $(X|P_0) = (X|1) = 0$. Enfin

$$P_2 = X - \frac{(X^2|P_0)}{(P_0|P_0)}P_0 - \frac{(X^2|P_1)}{(P_1|P_1)}P_1$$

Or, $(X^2|P_0) = (X^2|1) = \dfrac{2}{3}$, $(P_0|P_0) = 2$ et $(X^2|P_1) = (X^2|X) = 0$ donc

$$P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$$

3) Comme P_n est unitaire de degré n, on peut écrire $P_n = X^n + Q_n$, où $\deg Q_n \leqslant n-1$. Comme P_n est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^{n-1}) = \mathbb{R}[X]_{n-1}$,

$$(P_n|Q_n) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} ||P_n||^2 &= (P_n|P_n) \\ &= (P_n|X^n + Q_n) \\ &= (P_n|X^n) + (P_n, Q_n) \\ &= (P_n|X^n) \end{aligned}$$

4) Soit p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}[X]_{n-1}$. On sait que $d(X^n, \mathbb{R}[X]_{n-1}) = d(X^n, p(X^n)) = ||X^n - p(X^n)||$. Or $X^n = P_n - Q_n$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]_{n-1}^{\perp}$ et $-Q_n \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$, donc $p(X^n) = -Q_n$. On en déduit que

$$d(X^n, \mathbb{R}[X]_{n-1}) = ||X^n + Q_n|| = ||P_n||$$

5) D'après la question précédente, $d(X^2, \mathbb{R}[X]_1) = ||P_2||$. On calcule

$$\begin{aligned} ||P_2||^2 = (P_2|X^2) &= \left(X^2 - \frac{1}{3} \middle| X^2 \right) \\ &= (X^2|X^2) - \frac{1}{3}(1|X^2) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

On en déduit que $d(X^2, \mathbb{R}[X]_1) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

Exercice 3 – [MATRICES À DIAGONALE STRICTEMENT DOMINANTE]

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant les propriétés suivantes.

(1) $a_{ii} > 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$.

(2) $a_{ij} \leqslant 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

(3) Tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Nous allons démontrer que A est semblable à une matrice à diagonale strictement dominante.

On note $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $d = A^{-1}e$.

1) Montrer que les coordonnées d_i de d sont strictement positives. En déduire que la matrice $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ de $M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

2) Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$. Exprimer le coefficient (i, j) de $D^{-1}AD$ en fonction des coefficients de A et ceux de d.

3) Montrer que pour tout i, $(D^{-1}ADe)_i = d_i^{-1}$. Ainsi, $(D^{-1}ADe)_i > 0$.

4) Montrer que $D^{-1}AD$ est à diagonale strictement dominante.

5) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut A^{-1} ? Comment choisir D dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ pour que la matrice $D^{-1}AD$ soit à diagonale strictement dominante ?

Correction.

1) Soit $A^{-1} = (a'_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$. Alors la i-ème coordonnée de d est $d_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a'_{i,j} \geqslant 0$ puisque pour tout (i, j), $a'_{i,j} \geqslant 0$. Comme $\det(A^{-1}) \neq 0$, la ligne i de A^{-1} n'est pas nulle, donc il existe j_0 tel que $a'_{i_0,j} > 0$. Donc $d_i \geqslant a'_{i,j_0} > 0$.

2) $(D^{-1}AD)_{i,j} = d_i^{-1} d_j a_{i,j}$.

3) $D^{-1}ADe = D^{-1}Ad$ puisque $De = d$. Or, $Ad = e$ puisque $d = A^{-1}e$, donc $D^{-1}ADe = D^{-1}e = \begin{pmatrix} d_1^{-1} \\ \vdots \\ d_n^{-1} \end{pmatrix}$.

4) D'après la question précédente, $(D^{-1}ADe)_i > 0$ pour tout i. D'après la question 2), cela donne $\sum_{j=1}^{n} d_i^{-1} d_j a_{i,j} > 0$, donc

$$a_{i,i} > -\sum_{j \neq i} d_i^{-1} d_j a_{i,j}$$

Comme $a_{i,i} > 0$, c'est donc que $|a_{i,i}| = a_{i,i}$. Pour $i \neq j$, comme $d_i > 0$, $d_j > 0$ et $a_{i,j} \leqslant 0$, on obtient $|d_i^{-1} d_j a_{i,j}| = -d_i^{-1} d_j a_{i,j}$ donc

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |d_i^{-1} d_j a_{i,j}|$$

c'est-à-dire

$$|(D^{-1}AD)_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |(D^{-1}AD)_{i,j}|$$

ceci pour tout $i \in [[1, n]]$. C'est donc que $D^{-1}AD$ est à diagonale strictement dominante.

5) On rappelle que si $ad - bc \neq 0$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (par transposée de la comatrice : c'est un cas où la comatrice est facile à trouver). Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ses coefficients sont positifs, donc A est semblable à une matrice à diagonale strictement dominante. $A^{-1}e = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc si $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D^{-1}AD$ est à diagonale strictement dominante d'après la question précédente. En effet, on trouve que

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix}$$