Université de Bordeaux **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Licences math-info et CMI Année 2020–2021

**Devoir à la maison, 4 novembre 2020**
**Durée 1h30.**

**Barème indicatif.** Exercice 1 : 4, exercice 2 : 7, exercice 3 : 9.

**Exercice 1** – [DÉCOMPOSITION $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**1)** Résoudre l'équation $AX = B$ et écrire $A$ sous la forme $A = PLU$.

**2)** En utilisant le résultat précédent, calculer $\det A$.

**Exercice 2** – [ORTHOGONALISATION, DISTANCE À UN SOUS-ESPACE]

**Rappel.** *Soit $E$ un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$. Soient $(b_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de $E$ et $(b_i^*)_{i\in[[1,n]]}$ l'orthogonalisée de Gram Schmidt de la base $(b_i)$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de $(b_i)$ à $(b_i^*)$ sont égaux à 1. Alors pour tout $j \in [[1,n]]$,*

$$b_j^* = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(b_j|b_i^*)}{(b_i^*|b_i^*)} b_i^*$$

Dans $E = \mathbb{R}[X]_n$ (l'ensembles des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$), on considère le produit scalaire défini par

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

On note respectivement $||\cdot||$ et $d$ la norme et la distance définies par ce produit scalaire.

*Attention.* Les bornes de l'intégrale sont bien $-1$ et $1$.

**1)** Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(P_i)_{i=0}^n$ de $\mathbb{R}[X]_n$ telle que pour tout $i \in [[0,n]]$, $P_i$ soit unitaire de degré $i$.

**2)** Calculer les polynômes $P_i$ lorsque $n = 2$.

**3)** Montrer que $||P_n||^2 = (P_n|X^n)$.

**4)** On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_{n-1}$ de $\mathbb{R}[X]_n$. Montrer que

$$d(X^n, \mathbb{R}[X]_{n-1}) = ||P_n||$$

**5)** Calculer $d(X^2, \mathbb{R}[X]_1)$.

**Exercice 3** – [MATRICES À DIAGONALE STRICTEMENT DOMINANTE]

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant les propriétés suivantes.

(1) $a_{ii} > 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$.

(2) $a_{ij} \leqslant 0$ pour tout $(i, j)$ tel que $i \neq j$.

(3) Tous les coefficients de $A^{-1}$ sont positifs ou nuls.

Nous allons démontrer que $A$ est semblable à une matrice à diagonale strictement dominante.

On note $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $d = A^{-1}e$.

**1)** Montrer que les coordonnées $d_i$ de $d$ sont strictement positives. En déduire que la matrice $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ de $M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

**2)** Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$. Exprimer le coefficient $(i, j)$ de $D^{-1}AD$ en fonction des coefficients de $A$ et ceux de $d$.

**3)** Montrer que pour tout $i$, $(D^{-1}ADe)_i = d_i^{-1}$. Ainsi, $(D^{-1}ADe)_i > 0$.

**4)** Montrer que $D^{-1}AD$ est à diagonale strictement dominante.

**5)** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut $A^{-1}$ ? Comment choisir $D$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour que la matrice $D^{-1}AD$ soit à diagonale strictement dominante ?