université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021** **Examen première session** **PARCOURS : LIMI 501 Code UE : 4TTI502U** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 17/12/2020 Heure : 9h Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Barème indicatif : exercice 1 : 3, exercice 2 : 4, exercice 3 : 3, exercice 4 : 3, exercice 5 : 7.

Exercice 1

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$. Montrer que S est définie positive.

2. En appliquant la méthode des coefficients indéterminés, calculer la factorisation de Cholesky de S.

3. En déduire la factorisation de S sous la forme $S = {}^tUDU$ où $U \in \mathcal{T}^1_{sup,3}(\mathbb{R})$ et où D est diagonale.

Exercice 2

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. et $X = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On rappelle que la norme $||\cdot||_1$ est définie par $||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et on note $|||\cdot|||_1$ la norme de $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $||\cdot||_1$.

Cet exercice vise à établir l'égalité suivante (vue en cours et TD) : $|||A|||_1 = \max_{j\in[[1,n]]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

On pose $\mathcal{M} = \max_{j\in[[1,n]]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. On va donc démontrer que $|||A|||_1 = \mathcal{M}$.

1. Pour tout $i \in [[1,n]]$, exprimer $(AX)_i$ en fonction des coefficients de A et de X.

2. Montrer que si $||X||_1 = 1$, alors $||AX||_1 \leq \mathcal{M}$.

3. En déduire que $|||A|||_1 \leq \mathcal{M}$.

4. Montrer enfin que $|||A|||_1 \geq \mathcal{M}$ (pour cela, trouver un élément X tel que $||X||_1 = 1$ et $||AX||_1 \geq 1$).

Exercice 3

Soient a un réel, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que les suites d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel (pour la résolution d'une équation $AX = B$) sont respectivement $X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B$ et $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}B$, avec les notations du cours.

1. Discuter en fonction de a la convergence pour tout $X^{(0)}$ de la méthode de Jacobi.

2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 4 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1. Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

C'est-à-dire que $s_{i,j} = 2$ si $i = j \geq 2$ et $s_{i,j} = 1$ sinon. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit q la forme quadratique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $q(X) = {}^tXSX$. Appliquer à q l'algorithme de Gauss de décomposition en combinaison linéaire de carrés.
2. En déduire une matrice $U \in \mathcal{T}^1_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tUU$.

Exercice 5 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que $(X|Y) = {}^tXY$, et de la norme $||\cdot||_2$ définie par ce produit scalaire. Pour tout j, on note A_j la j-ème colonne de A. Dans cet exercice, on utilise la décomposition de Cholesky pour démontrer l'inégalité de Hadamard $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$ et décrire les cas d'égalité.
1. Établir cette inégalité lorsque $\det A = 0$.
2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.
On sait donc que ${}^tAA$ admet une factorisation de Cholesky : il existe $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = {}^tRR$.
Pour tout j, on note R_j la j-ème colonne de R. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on note $r_{i,j}$ le coefficient (i,j) de R.
b) Montrer que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||R_j||_2$.
c) En déduire que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$.
d) Montrer que $|\det A| = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$ si et seulement si ${}^tAA$ est diagonale.
e) En déduire que $|\det A| = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$ si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.
3. On ne suppose plus que A est inversible. Montrer que $|\det A| = \prod_{j=1}^{n} ||A_j||_2$ si et seulement si l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée.
(i) L'une des colonnes de A est nulle.
(ii) Les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.