Université de Bordeaux **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques 2020–2021

Devoir à la maison numéro 2, à rendre le 4 décembre 2020
Systèmes triangulaires, Cholesky, moindres carrés

Ce travail peut être fait à deux. Il s'agit d'un travail exclusivement expérimental. Aucune justification théorique n'est demandée.

Il est demandé d'indiquer les numéros d'exercices et de questions en commentaires. Indiquez aussi les noms du binôme (ou monôme) sous le titre principal. Il est conseillé de commenter brièvement les fonctions et les résultats obtenus. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation du travail.

Dans l'énoncé, les indices de matrices et de vecteurs commencent à 0.

Indications pour les commentaires sur `Jupyter`**.** Sur `Jupyter`, on trouve dans le bandeau d'outils un onglet pour le "mode". Quand ce mode est `code`, on peut faire des calculs.

Si on choisit le mode `markdown`, alors on peut mettre un commentaire. Pour écrire un grand titre : `# Titre`. Un plus petit titre : `## Titre`. Plus il y a de `#`, plus le titre est petit.

Il est aussi possible de faire un travail sur un éditeur de texte. Dans ce cas aussi, une rédaction soignée est demandée.

Exercice 1 – [Systèmes triangulaires]

1) Soit $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A une matrice triangulaire supétieure de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $B \in M_{n,1}(K)$. Pour résoudre l'équation $AX = B$, on peut par exemple utiliser la fonction suivante.

```
def TriangleSup(K,A,B):
    n=B.length()
    X=vector(K,n)
    for i in range(n-1,-1,-1):
        X[i]=A[i,i]^(-1)*(B[i]-sum([A[i,j]*X[j] for j in range(n-1,i-1,-1)]))
    return X
```

Programmer une telle fonction `TriangleSup` qui prend en paramètres K, A et B et qui rend la solution de l'équation $AX = B$.

On pourra tester cette fonction sur $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Écrire la fonction `TriangleInf(K,A,B)` qui s'applique à une matrice A triangulaire inférieure. Dans ce cas, i varie de 0 à $n-1$ et on utilise les X_j pour

$j \in [[0, i-1]]$ déjà calculés.

$$X_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(B_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{i,j}X_j\right)$$

On pourra appliquer `TriangleInf` à $K = \mathbb{Q}$, la transposée ${}^tA$ de A et B.

Exercice 2 – [Décomposition de Cholesky]

Dans cet exercice et le suivant, on demande des calculs dans $\mathbb{R}$.

1) Écrire une fonction `Cholesky` qui prend une matrice S symétrique définie positive en entrée et rend l'unique matrice R de $\mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tRR$.

On pourra utiliser l'algorithme donné par l'exercice 12 de la feuille d'exercices numéro 5, c'est à dire, en calculant pour m allant de 0 à $n-1$ et j de $m+1$ à $n-1$:

$$r_{m,m} = \sqrt{s_{m,m} - \sum_{k=0}^{m-1} r_{k,m}^2} \quad \text{et} \quad r_{m,j} = \frac{1}{r_{m,m}}\left(s_{m,j} - \sum_{k=0}^{m-1} r_{k,m}r_{k,j}\right).$$

On pourra essayer la fonction `Cholesky` sur la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2) Appliquer cette fonction à $S = (s_{ij}) \in M_9(\mathbb{R})$ où pour tout $(i,j) \in [[0,8]]^2$,

$$s_{ij} = \min(i,j) + 1$$

3) Construire une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ au hasard et appliquer la fonction `Cholesky` à la matrice $S = {}^tAA$.

Exercice 3 – [Problème des moindres carrés]

Soient $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $m \geqslant n$ et que $\operatorname{rg} A = n$. L'équation $AX = B$ n'a pas nécessairement des solutions. On peut alors essayer de trouver une *solution approchée* : on va chercher $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale. Cela revient à dire que la somme

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2$$

est minimale. Cette question est appelée *problème des moindres carrés*.

On admet le théorème suivant.

Théorème 1. *La norme $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si*

$$ {}^tAAX = {}^tAB \tag{1}$$

Soit $S = {}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$. Alors S est symétrique positive. De plus, comme $\operatorname{rg} A = n$, on peut vérifier que S est définie positive. Ainsi, on peut lui appliquer la fonction `Cholesky` pour trouver $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $S = {}^tRR$. Le problème des moindres carrés se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires

$${}^tRY = {}^tAB \text{ et } RX = Y$$

1) Soient les points de $\mathbb{R}^2$ suivants. $P_0 = (1, -1.9)$, $P_1 = (2, 1.01)$, $P_2 = (3, 4.21)$, $P_3 = (4, 6.8)$, $P_4 = (5, 5.9)$. On cherche une droite $\mathcal{D}$ (d'équation $y = a_1 x + a_0$) qui approche au mieux ces points "au sens des moindres carrés". C'est-à-dire que l'on cherche $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que la somme $\sum_{i=0}^{4} ((a_0 + a_1 P_i[0]) - P_i[1])^2$ est minimale. Traduisons cela matriciellement. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1.9 \\ 1.01 \\ 4.21 \\ 6.8 \\ 5.9 \end{pmatrix}$.
On cherche $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale.

Trouver cet élément X, en utilisant uniquement les fonctions `Cholesky`, `TriangleInf` et `TriangleSup` (et bien sûr des fonctions usuelles de sage comme la transposée et la multiplication des matrices).

2) Dessiner sur un même graphe l'ensemble des points P_i et la droite $\mathcal{D}$. Pour cela, si $f = a_1 x + a_0$ et si P est la liste des P_i, il suffit d'écrire

```
Droite=plot(f,(x,0,5))
Points=point(P,color="red")
Droite+Points
```

Bien sûr, les couleurs peuvent être choisies au goût de chacune et chacun.

3) Soient les points $P_0 = (1, 1.96)$, $P_1 = (2, -0.12)$, $P_2 = (3, 0.55)$, $P_3 = (4, 2.84)$, $P_4 = (5, 8.16)$. En suivant la même méthode que précédemment, trouver la parabole (d'équation $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$) qui approche au mieux ces points au sens des moindres carrés.

4) Dessiner ces points et cette parabole sur un graphe.

5) Construire un autre exemple.