Université de Bordeaux | **L3 – Algorithmique mathématique 2**
Mathématiques | 2020–2021

FEUILLE D'EXERCICES n° 1 [*Correction*]

Théorème de Gershgorin-Hadamard

Exercice 1 –

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction

1) Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples, si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Ce n'est le cas d'aucune matrice nilpotente non nulle : X^n annule A, donc le polynôme minimal, qui divise X^n ne peut être à racines simples que s'il est égal à X ; i.e., $A = 0$.

2) Si $1 \neq 3$ (corps de caractéristique différente de 2), elle est diagonalisable car annulée par $(X-1)(X-3)$, scindé à racine simple. (Se généralise au cas d'une matrice de dimension n qui a n valeurs propres distinctes.)

En caractéristique 2 elle est diagonalisable car diagonale !

Exercice 2 – Soit K un corps et soit $E = K[X]_n$ le K-espace vectoriel des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

1) Soit d l'application de E dans E définie par

$$d\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Montrer que d est une application linéaire.

2) Quelle est la matrice M de d dans la base $1, X, X^2, \ldots, X^n$ de E ?

3) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Correction

1) Soient $\lambda, \mu \in K$ et $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes de E. Alors $d(\lambda P + \mu Q) = \lambda d(P) + \mu d(Q)$ car $k(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda k a_k + \mu k b_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

2) C'est la matrice $(n+1)\times(n+1)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Non pour $n > 0$ car elle est nilpotente et non nulle : $d^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ pour tout $P \in K_n[X]$. Oui pour $n = 0$ puisqu'elle est nulle.

Exercice 3 –

1) La matrice suivante est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Si oui, la diagonaliser.

3) Vérifier que les valeurs propres de A sont bien dans l'ensemble prévu par le théorème de Gershgorin-Hadamard.

Correction

1) Manifestement son noyau est de dimension au moins 2 : il contient les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$; de plus $(1,1,1)$ est aussi vecteur propre, pour la valeur propre 3. Ces trois vecteurs étant indépendants (le déterminant est 3), ils forment une base de vecteur propres et A est diagonalisable. Autre méthode : $A^2 - 3A = 0$, et $X(X-3)$ annule A. (Noter qu'en caractéristique 3, A serait nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.)

2) Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

calculons l'inverse de P par la méthode de Gauss appliquée à la matrice étendue :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0,0,3)$. (Noter qu'en caractéristique 3, le calcul ci-dessus n'aurait pas de sens, 3 n'étant pas inversible.)

Exercice 4 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calculer les valeurs propres de A que $\rho(A) \leqslant 8$.

Correction

Le théorème d'Hadamard-Gershgorin donne la majoration

$$\rho(A) \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \ ,$$

ici

$$\rho(A) \leqslant \max \left\{ 3+\sqrt{2}, 4+\sqrt{5}, 8 \right\} = 8.$$

Exercice 5 – Trouver une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle $0 \in \bigcup_{k=0}^{n} D_k$ (avec les notations du cours).

Correction

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 – Trouver une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante non inversible.

Correction

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 –

1) Soit z un nombre complexe. Montrer que $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$.

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'inégalité $|x| < R$ sous forme de deux inégalités sans valeur absolue.

3) Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante telle que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in [[1, n]]$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A,

$$\operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Indications. Si λ est une valeur propre, on pourra lui appliquer le théorème de Gerschgorin-Hadamard. Soit i tel que $\lambda \in D_i$, on pourra appliquer la question 1 à $a_{i,i} - \lambda$.

Correction

1) Soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$.

2) $|x| < R \Leftrightarrow -R < x < R$.

3) Soit i tel que $\lambda \in D_i$. Alors

$$\mathrm{Re}(\lambda - a_{i,i}) \leqslant |\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

d'où

$$\mathrm{Re}(\lambda - a_{i,i}) \geqslant -\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

et

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant a_{i,i} - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| > 0$$

Exercice 8 – On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est réductible s'il existe une partition de $\{1, \dots n\}$ en deux ensembles I et J (non vides) telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Dans le cas contraire, on dit que A est irréductible.

On veut démontrer le second théorème de Gershgorin-Hadamard suivant.

Théorème 1. *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible. Si une valeur propre λ de A n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gershgorin D_k, alors tous les cercles de Gershgorin passent par λ.*

1) Donner des exemples de matrices réductibles et de matrices irréductibles.
2) Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible, et soit λ comme dans le théorème ci-dessus. Soit $x =^t (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ. On pose

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \ |x_i| = \max_j |x_j| \right\}.$$

a) Si $K = \mathbb{C}$ et $x = {}^t(0, -3, 1, -1, 2)$, quel est l'ensemble I ? Même question si $x = {}^t(0, 1+i, 1, -1, 1-i)$.

b) Montrer que si $i \in I$, alors

$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = 0.$$

Indications. Chacune de ces deux égalités se montre par double inégalités. Dans cette question, le fait que A est irréductible n'entre pas en compte. C'est l'hypothèse sur λ qui intervient.
$|\lambda - a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ provient des hypothèses du théorème.
$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ peut s'obtenir en revoyant la preuve du théorème de Gershgorin-Hadamard.
$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \geqslant 0$ n'est pas très difficile à obtenir.
$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \leqslant 0$: utiliser la première égalité ($|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$).
3) En déduire que $I = \{1, \dots, n\}$, et démontrer le théorème 1.
Indication. C'est là qu'intervient le fait que A est irréductible.

Correction

1) Matrices irréductibles. Toutes les matrices ne contenant pas de 0 ; la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(idem en remplaçant les 1 par n'importe quelle entrée non nulle) ; la matrice d'adjacence d'un graphe fortement connexe (pour toute paire de sommets u, v, il existe un chemin permettant d'aller de u à v et un de v à u). Une matrice telle que, une fois les entrées non nulles remplacées par des 1, on obtienne la matrice d'adjacence d'un graphe fortement connexe.

Matrices réductibles. Une matrice contenant une ligne ou une colonne de 0, la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
les matrices triangulaires (supérieures ou inférieures) ; les matrices triangulaires par bloc.

2)a) On a $I = \{2\}$ et $I = \{2, 5\}$ respectivement.

b)

- λ n'appartient pas à l'intérieur de D_i, donc il n'est pas vrai que $|\lambda - a_{ii}| < \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$, ce qui démontre $|\lambda - a_{ii}| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.
- x étant vecteur propre pour λ, on a $\sum_j a_{i,j}x_j = \lambda x_i$ pour tout i donc $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j$. Pour $i \in I$, on a $x_i \neq 0$ (car x n'est pas le vecteur nul) et $|x_j/x_i| \leqslant 1$ pour tout j. Ainsi, $\lambda - a_{i,i} = \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j/x_i$ et
$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_j/x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$
par l'inégalité triangulaire.
- Pour $i \in I$, on a $|x_i| \geqslant |x_j|$ pour tout j, donc $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|(|x_i| - |x_j|) \geqslant 0$ suit.
- $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = |\lambda - a_{i,i}|\,|x_i| - \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|$ d'après les deux premiers points. Or $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j$, donc $|(\lambda - a_{i,i})x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}x_j|$, par l'inégalité triangulaire et on obtient bien
$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \leqslant 0$$

3) Pour $i \in I$, on a donc $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|(|x_i| - |x_j|) = 0$ or c'est une somme de termes positifs, qui sont donc tous nuls. Donc $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \in I$ et $j \notin I$. La matrice A étant irréductible, on a soit $I = \emptyset$ (absurde : le maximum se réalise en au moins un indice) ou $J = \emptyset$, c'est-à-dire $I = \{1, \ldots, n\}$. L'équation
$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$
pour tout i dit bien que tous les cercles de Gershgorin passent par λ.

Exercice 9 – Soit A dans $M_n(K)$. On dit que A est à diagonale fortement dominante si A est à diagonale dominante et s'il existe un indice k pour lequel

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|.$$

1) Soit $A \in M_2(K)$ à diagonale fortement dominante. Montrer que si $a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1$ et 2, alors A est inversible.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe des matrices de taille n à diagonale fortement dominante non inversibles.

3) En utilisant l'exercice 8, montrer que toute matrice de $M_n(K)$ irréductible et à diagonale fortement dominante est inversible.

4) Donner un exemple de matrice à diagonale fortement dominante réductible, inversible et qui ne soit pas à diagonale strictement dominante.

Correction

1) Considérons $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ fortement dominante : on a $|a| \geqslant |b|$, $|d| \geqslant |c|$ et l'une des deux inégalités est stricte. Montrons que son déterminant $ad - bc$ est non nul : en effet, $|ad| \geqslant |bc|$ et l'inégalité est stricte car $ad \neq 0$ et l'une des deux inégalités utilisées l'est (sans l'hypothèse $ad \neq 0$, ça ne marche pas : $|a| > |b|$ devient $0 \geqslant 0$ en multipliant par $d = 0$). Donc $|ad - bc| \geqslant |ad| - |bc| > 0$.

2) Pour $n = 2$, on peut prendre $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; plus généralement en toute dimension $n \geqslant 2$, la matrice élémentaire $E_{1,1}$ dont toutes les entrées sont 0 sauf le coin supérieur gauche. (Pour $n = 1$ ça ne marche plus : $E_{1,1}$ est inversible.)

3) Supposons que 0 soit valeur propre. Alors les inégalités

$$|a_{i,i}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \leqslant n$$

(diagonale dominante) disent exactement que 0 n'est pas dans l'intérieur de D_i pour tout i. Et l'inégalité stricte pour $i = k$ dit que $0 \notin D_k$, ce qui contredit le théorème de l'exercice 8 : absurde. Donc 0 n'est pas valeur propre et A est bien inversible.

4) Par exemple, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.