Université de Bordeaux
Mathématiques

L3 – Algorithmique mathématique 2
2022–2023

FEUILLE D'EXERCICES n° 1
Théorème de Gershgorin-Hadamard

Exercice 1 – Soit K un corps.

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ est-elle diagonalisable ?

2) Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

Exercice 2 – Soit K un corps, et soit $E = K[X]_n$ le K-espace vectoriel des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

1) Soit d l'application de E dans E définie par

$$d\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Montrer que d est une application linéaire.

2) Quelle est la matrice M de d dans la base $1, X, X^2, \dots, X^n$ de E ?

3) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 –

1) La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Si oui, la diagonaliser.

3) Vérifier que les valeurs propres de A sont bien dans l'ensemble prévu par le théorème de Gershgorin-Hadamard.

Exercice 4 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calculer les valeurs propres de A que $\rho(A) \leqslant 8$.

Exercice 5 – Trouver une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle $0 \in \bigcup_{k=0}^{n} D_k$ (avec les notations du cours).

Exercice 6 – Trouver une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante non inversible.

Exercice 7 –

1) Soit z un nombre complexe. Montrer que $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$.

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'inégalité $|x| < R$ sous forme de deux inégalités sans valeur absolue.

3) Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante telle que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in [[1, n]]$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A,

$$\operatorname{Re} \lambda > 0.$$

[*Si λ est une valeur propre, soit i tel que $\lambda \in D_i$. On peut appliquer la question 1) à $a_{i,i} - \lambda$.*]

Exercice 8 – On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est réductible s'il existe une partition de $\{1, \ldots n\}$ en deux ensembles I et J telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Dans le cas contraire, on dit que A est irréductible.

On veut démontrer le second théorème de Gershgorin-Hadamard suivant.

Théorème. *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible. Si une valeur propre λ de A n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gershgorin D_k, alors tous les cercles de Gershgorin passent par λ.*

1) Donner des exemples de matrices réductibles et de matrices irréductibles.

2) Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible, et soit λ comme dans le théorème ci-dessus. Soit $x =^t (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ. On pose

$$I = \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ |x_i| = \max_j |x_j| \right\}.$$

a) Si $K = \mathbb{C}$ et $x = {}^t(0, -3, 1, -1, 2)$, quel est l'ensemble I ? Même question si $x = {}^t(0, 1 + i, 1, -1, 1 - i)$.

b) Montrer que si $i \in I$, alors

$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = 0.$$

Indications. Chacune de ces deux égalités se montre par double inégalités. Dans cette question, le fait que A est irréductible n'entre pas en compte. C'est l'hypothèse sur λ qui intervient.

- $|\lambda - a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *provient des hypothèses du théorème.*
- $|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *s'obtient en revoyant la preuve de Gershgorin-Hadamard.*
- $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \geqslant 0$ *n'est pas très difficile à obtenir.*
- $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) \leqslant 0$ *: utiliser* $|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

3) En déduire que $I = \{1, \ldots, n\}$, et démontrer le théorème 8.
[*C'est là qu'intervient le fait que A est irréductible.*]

Exercice 9 – Soit A dans $M_n(K)$. On dit que A est à diagonale fortement dominante si A est à diagonale dominante et s'il existe un indice k pour lequel

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|.$$

1) Soit $A \in M_2(K)$ à diagonale fortement dominante. Montrer que si $a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1$ et 2, alors A est inversible.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe des matrices de taille n à diagonale fortement dominante non inversibles.

3) En utilisant l'exercice 8, montrer que toute matrice de $M_n(K)$ irréductible et à diagonale fortement dominante est inversible.

4) Donner un exemple de matrice à diagonale fortement dominante réductible, inversible et qui ne soit pas à diagonale strictement dominante.