Université de Bordeaux
Licences math-info et CMI

MHT 631 – Licence
Année 2021–2022

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

Formes quadratiques, produits scalaires, orthogonalité

Exercice 1 – Montrer que les applications q de E dans $\mathbb{R}$ suivantes sont des formes quadratiques. Pour chacune d'entre elles, indiquer si cette forme quadratique est positive, et si elle est définie positive.

1) $E = \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$.

2) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1x_2$ (où $x = (x_1, x_2)$).

3) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$) (pour la positivité de q, on peut utiliser le discriminant d'un polynôme du second degré).

4) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ (où $x = (x_1, x_2)$).

Exercice 2 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Soient α_1 et α_2 deux réels. Soient f_1 et f_2 deux formes bilinéaires symétriques sur E. Montrer que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est une forme bilinéaire symétrique.

2) Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E. Montrer que $\alpha q_1 + \alpha_2 q_2$ est une forme quadratique.

3) Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E ?

Exercice 3 – Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques et donner leur forme bilinéaire symétrique associée. Indiquer ensuite si q est positive et si elle est définie positive.

1)

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1 \ldots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

où pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

2)

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt \end{aligned}$$

Indications. On rappelle le résultat d'analyse suivant.

Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

On rappelle aussi qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$ a un nombre fini de racines.

Exercice 4 – Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire défini par $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

1) Soient $b_1 = (1, 1)$ et $b_2 = (1, 0)$. Montrer que $b = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) En donner l'orthogonalisée b^* de Gram-Schmidt de type 1 (dans le théorème de Gram-Schmidt du cours). En déduire son orthonormalisée de Gram-Schmidt b'.

3) Quelle est la matrice de passage de b' à b ?

4) En utilisant la proposition (4.3.8) du cours, calculer les coordonnées de $(2, 1)$ dans la base b'.

Exercice 5 –

1) Même exercice sur $\mathbb{R}^3$, avec $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ et les vecteurs $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$ et $b_3 = (1, 0, 1)$ (on calculera les coordonnées de $x = (1, 1, 1)$ dans la base b').

2) Soit $F = \text{Vect}(b_1, b_2)$. Soient p la projection orthogonale sur F et p' la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $p(x)$ et $p'(x)$ (voir la proposition 4.3.9).

3) Calculer la distance de x à F.

Exercice 6 – On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

1) Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0))$. Déterminer une base orthonormale de F.

2) Soit p la projection orthogonale sur F, et soit $x = (0, 0, 0, 1)$. Déterminer $p(x)$. Calculer la distance $d(x, F)$ de x à F.

3) Calculer $d(x, F^\perp)$.

Indication. Pas besoin de déterminer $F^\perp$.

Exercice 7 – Soit $E = \mathbb{R}[X]_2$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = \int_0^1 P^2(t)dt.$$

1) Montrer que E muni de q est un espace euclidien.

2) Déterminer une base orthogonale de E formée de polynômes unitaires.

Exercice 8 – Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. On définit sur E l'application q par

$$q(M) = \mathrm{Tr}(\,^tMM).$$

1) Montrer que q est une forme quadratique.

2) Montrer que E muni de q est euclidien.

3) Déterminer une base orthonormale de E.

Exercice 9 – Soit E un espace euclidien. Soit (b_i) une base de E et soit (b_i^*) l'orthonormalisée de Gram-schmidt de (b_i).

1) Que vaut b_1^* ?

2) Montrer que pour $j \in [[2, n]]$, $b_j^* = \dfrac{b'_j}{||b'_j||}$, où $b'_j = b_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} (b_j|b_i^*)b_i^*$.

Exercice 10 – Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. Soit F un sous espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur F. Soit x un élément de E. Montrer que pour tout $y \in F \setminus \{p(x)\}$,

$$d(x, y) > d(x, p(x)).$$

En déduire que

$$d(x, F) = d(x, p(x)).$$

Exercice 11 – Soit n un entier naturel non nul. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $H = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$. Soit p la projection orthogonale sur H. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$,

$$p(x) = x - \frac{(a|x)}{(a|a)} a$$

Exercice 12 – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $b(x, y) = \dfrac{1}{4}\,(q(x+y) - q(x-y))$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$.

3) Celle égalité est appelée identité du parallélogramme. Pourquoi ?

Exercice 13 – Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit l'application q par

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2$$

où (a_i) vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 < 1$.

1) Montrer que q est une forme quadratique (ne pas développer le carré ; pour trouver la forme bilinéaire symétrique associée, on peut utiliser l'identité $(A + B)^2 - A^2 - B^2 = 2AB$).

2) Montrer que E muni de q est euclidien (pour montrer que q est définie positive, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 14 – Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2) Déterminer l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Exercice 15 – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique positive sur E. On note b la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$b(x, y)^2 \leqslant q(x)q(y)$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui n'a été démontrée en cours que dans le cas des formes quadratiques définies positives).

2) Donner un exemple où $b(x, y)^2 = q(x)q(y)$ et où x et y ne sont pas colinéaires.

3) Donner un exemple où q n'est plus positive et où $b(x, y)^2 > q(x)q(y)$.