Université de Bordeaux | **MHT 631 – Licence**
Licences math-info et CMI | Année 2020–2021

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Matrices de Gram,

espaces euclidiens,

matrices symétriques, orthogonales

Exercice 1 – Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$$

Quelle est la matrice de Gram de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour q ?

Exercice 2 – Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par M (c'est-à-dire telle que M soit la matrice de Gram de la base canonique) ?

Exercice 3 – Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ positive.
1) Montrer que pour tout i, $a_{ii} \geqslant 0$.
2) Montrer que

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}.$$

Exercice 4 –
1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver une matrice orthogonale U telle que ${}^tUAU$ soit diagonale.
2) Même question si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 – Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Exercice 6 – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et positives.

1) On note $A = (a_{ij})$. Montrer que $a_{ii} \geqslant 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$.

2) Montrer que

$$0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant (\mathrm{Tr}A)\,(\mathrm{Tr}B)\,.$$

Exercice 7 – [Décomposition QR] On note $\mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ uniques telles que $A = QR$ (on pourra utiliser une orthonormalisée de Gram-Schmidt). On appelle cette factorisation la décomposition QR de A.

2) En utilisant l'exercice 5 de la feuille 4, donner la décomposition QR de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier sans calculs que S est symétrique définie positive.

2) Soit $(*|*)$ le produit scalaire de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par S, c'est-à-dire :

$$(X|Y) = {}^tXSY$$

Interpréter S comme la matrice de Gram pour $(\cdot|\cdot)$ d'une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

3) Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt e' de la base canonique $e = (e_1, e_2)$ de $M_{2,1}(\mathbb{R})$, ainsi que la matrice de passage de e' à e. En déduire une matrice $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tRR$ (factorisation de Cholesky de S).

Exercice 9 – [Factorisation de Cholesky] On note $\mathrm{Sym}^{++}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ définies positives. Soit $A \in \mathrm{Sym}^{++}_n(\mathbb{R})$.

1) Interpréter A comme la matrice de Gram d'un produit scalaire défini sur $M_{n,1}(R)$.

2) Déduire de la proposition 4.4.5 qu'il existe $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tRR$.

3) Montrer que cette factorisation est unique. Elle est appelée factorisation de Cholesky.

Exercice 10 – (autre méthode pour l'exercice 9). Soit $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A admet une décomposition LU en utilisant l'exercice 7 de la feuille 2.

2) Retrouver l'existence et l'unicité de la factorisation de Cholesky de A.

Exercice 11 – (en rapport avec l'exercice 8). Reprenons la matrice définie positive $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Retrouver la factorisation de Cholesky de S en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

2) Retrouver encore ce résultat en écrivant $S = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$ et en résolvant l'équation $S = {}^tRR$.

3) Retrouver une dernière fois ce résultat en écrivant la forme quadratique associée à $(*|*)$ sous forme d'une somme de deux carrés.

Exercice 12 – (en rapport avec l'exercice 9). Soit $S = (s_{i,j})$ une matrice symétrique définie positive de $M_n(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $R \in T^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tRR = S$. On note $R = (r_{i,j})$.

1) Montrer que pour tout $m \in [[1, n]]$ et tout $j > m$

$$r_{m,m} = \sqrt{s_{m,m} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{k,m}^2} \quad \text{et} \quad r_{m,j} = \frac{1}{r_{m,m}} \left(s_{m,j} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{k,m} r_{k,j} \right).$$

2) Évaluer le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de R par cette méthode.

Exercice 13 – Soit q une forme quadratique hermitienne. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in E$, $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$.

Exercice 14 – Soient E un espace hermitien, h son produit scalaire hermitien et q sa forme quadratique hermitienne associée. On va démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|h(x, y)|^2 \leqslant q(x)q(y).$$

1) Montrer le résultat quand $h(x, y) = 0$.

2) On suppose que $h(x,y) \neq 0$. Soit $z = \dfrac{\overline{h(x,y)}}{|h(x,y)|}y$.

a) Montrer que $h(x,z) \in \mathbb{R}$.

b) En considérant la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $q(x+tz)$, montrer que $|h(x,z)|^2 \leqslant q(x)q(z)$.

c) En déduire que $|h(x,y)|^2 \leqslant q(x)q(y)$. C'est bien l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

d) Montrer que $|h(x,y)|^2 \leqslant q(x)q(y)$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exercice 15 – Soient E un espace hermitien, h son produit scalaire hermitien et q sa forme quadratique hermitienne associée. Pour tout $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{q(x)}$. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme.