Université de Bordeaux
Licences math-info et CMI

MHT 631 – Licence
Année 2019–2020

FEUILLE D'EXERCICES n° 7

Méthodes itératives (travail sur machine)

Exercice 1 – [SUITES DÉFINIES PAR UNE RÉCURRENCE $X^{(k+1)} = KX^{(k)} + C$]

1) Écrire une fonction `Iteration` qui étant donnés $K \in M_n(\mathbb{R})$, C et $X^{(0)} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $l \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ calcule le l-ème terme de la suite définie par la relation

$$X^{(k+1)} = KX^{(k)} + C \text{ pour tout } k \leqslant 0$$

Dans la suite, sauf mention contraire, on fera tous les calculs dans $\mathbb{R}$, en utilisant donc des approximations. Pour cela, il suffira dedéfinir la valeur initiale $X^{(0)}$ de la suite à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2) Appliquer la fonction `Iteration` à $K = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle ?

3) Essayer encore cette fonction avec les mêmes paramètres mais en prenant diverses valeurs de $X^{(0)}$ prises au hasard dans $M_3(\mathbb{R})$. Que constate-t-on ?

Le cours dit qu'une telle suite converge pour tout vecteur initial $X^{(0)}$ si et seulement si $\rho(K) < 1$. Commenter les résultats obtenus.

4) Essayer encore avec $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10^{-10} \end{pmatrix}$.

5) On garde la même matrice K et on prend $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $X^{(0)} = \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Appliquer `Iteration` à ces valeurs en faisant les calculs dans $\mathbb{Q}$ avec 100 itérations, puis calculer une approximation numérique de la valeur obtenue (voir la fonction `numerical_approx`). Normalement, il ne faut pas faire les calculs dans $\mathbb{Q}$, mais dans $\mathbb{R}$. Il s'agit juste d'une expérience.

Si la suite converge, elle doit converger vers $(I_3 - K)^{-1}C$. Est-ce cohérent avec le résultat obtenu ?

6) Appliquer à nouveau `Iteration` aux mêmes valeurs, mais en faisant tous les calculs dans $\mathbb{R}$.

7) Changeons de matrice. Soit $K = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquer la fonction `Iteration` à K et diverses valeurs de C et $X^{(0)}$. La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle ? Calculer $\rho(K)$ (en utilisant `eigenvalues`).

Exercice 2 – [Méthode de Jacobi]
On s'intéresse à l'équation $AX = B$, où $A = (a_{i,i}) =\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

On veut construire une suite $(X^{(k)})$ de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ qui converge vers la solution.

Notation. On décompose la matrice A sous la forme $A = L + D + U$ où L est triangulaire inférieure à diagonale nulle, U est triangulaire supérieure à diagonale nulle et où D est diagonale. Autrement dit :

$$L_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad D_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad U_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quitte faire des permutations sur les lignes, on peut supposer que $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$ (puisque $\det A \neq 0$). On suppose donc que D est inversible.

On part d'un vecteur initial $X^{(0)}$ quelconque et on définit la suite $(X^{(k)}$ par la relation de récurrence

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B$$

que l'on peut encore écrire

$$X^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(k)} + D^{-1}B$$

Si l'on note $X_i^{(k)}$ le i-ème coefficient de $X^{(k)}$, cela donne

$$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}X_j^{(k)}\right). \tag{1}$$

1) Écrire une fonction `Jacobi` qui étant donnés A, B, un vecteur initial $X^{(0)}$ et k cherche à calculer la solution de $AX = B$ par la méthode de Jacobi en utilisant k itérations.

2) Appliquer cette méthode à $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et par exemple $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifiera que le vecteur obtenu est bien une approximation de la solution.

3) Écrire une fonction `Jacobi2` qui applique encore la méthode de Jacobi avec la modification suivante. La fonction ne prendra plus le nombre d'itérations k en paramètres, mais un réel positif ε et elle rendra $X^{(k)}$ dès que

$$||X^{(k)} - X^{(k-1)}||_\infty < \varepsilon$$

La fonction devra aussi donner le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à cette inégalité.

Appliquer cette nouvelle fonction à A et B.

4) Appliquer cette fonction à diverses valeurs de A obtenues de la façon suivante. Choisir A_0 au hasard dans $M_n(\mathbb{R})$. Par défaut, les coefficients sont pris dans $]-1,1[$. Prendre alors $A = A_0 + nI_n$. Alors A est à diagonale strictement dominante. On verra en cours que dans ce cas, la méthode converge. Le vecteur B et le vecteur initial pourront être choisis au hasard dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 – [La méthode de Gauss-Seidel]
C'est une transformation de la méthode de Jacobi. On reprend l'égalité (1) avec la modification suivante : on calcule les coordonnées $X_i^{(k+1)}$ pour i allant de 1 à n, en changeant les $X_j^{(k)}$ par $X_j^{(k+1)}$ quand celui-ci a déjà été calculé, c'est-à-dire quand $j < i$.

$$X_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right). \tag{2}$$

Reprendre les questions de l'exercice précédent en utilisant la méthode de Gauss-Seidel à la place de celle de Jacobi. On appellera `GS` et `GS2` les fonctions correspondantes.

On comparera les performances des deux méthodes en terme de vitesse de convergence.

Exercice 4 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Expérimenter les fonctions `Jacobi` et `GS` sur les équations $AX = B$ et $A'X = B$ en prenant un vecteur initial $X^{(0)}$ choisi à votre guise.

Exercice 5 – [Relaxation]
La relaxation utilise une méthode itérative comme la méthode de Jacobi ou celle de Gauss Seidel pour en définir une nouvelle. On choisit donc ici l'une de ces deux méthode que l'on appelle méthode de base.

On fixe un paramètre réel $\omega > 0$. Admettons que $X^{(k)}$ ait déjà été calculé. Soit $\overline{X^{(k+1)}}$ le vecteur que l'on obtiendrait en utilisant la méthode de base choisie (Jacobi ou Gauss-Seidel). On définit alors $X^{(k+1)}$ par

$$X_i^{(k+1)} = \omega \overline{X^{(k+1)}} + (1-\omega) X_i^{(k)}.$$

Ainsi, si la méthode de base est la méthode de Jacobi, on utilise la récurrence (1) et on obtient la nouvelle relation de récurrence

$$X_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right) + (1-\omega) X_i^{(k)}. \tag{3}$$

Si la méthode de base est la méthode de Gauss-Seidel, on utilise la récurrence (2) et on obtient

$$(4) \qquad X_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} X_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j} X_j^{(k)} \right) + (1-\omega) X_i^{(k)}.$$

1) Écrire une fonction pour la relaxation à partir de Gauss-Seidel. Cette fonction prendra en donnée une matrice A, un vecteur B, un vecteur initial $X^{(0)}$, un réel ω et un entier k. En sortie, il donnera le vecteur $X^{(k)}$ obtenu après k itérations.

2) Essayer la fonction obtenue sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et n'importe quels B et $X^{(0)}$ en cherchant à voir de façon expérimentale pour quels ω la méthode converge.

Exercice 6 – Calcul de valeurs propres et vecteurs propres.

Soit $||\cdot||$ une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $X^{(0)} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $||X^{(0)}|| = 1$. On définit les suites $(X^{(k)})$ et $(Y^{(k)})$ en posant

$$Y^{(k+1)} = AX^{(k)} \ , \ X^{(k+1)} = \frac{1}{||Y^{(k+1)}||} Y^{(k+1)}.$$

1) On choisit comme norme la norme $||\cdot||_\infty$. Écrire une fonction `Puissances` qui étant donnés A, $X^{(0)}$ et k rend $||Y^{(k+1)}||_\infty$, $X^{(k)}$ et $Y^{(k+1)}$.

2) Appliquer cette fonction à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Vérifier les faits suivants (on pourra utiliser `eigenvalues`). Soient λ la valeur propre de plus grand module et k un entier assez grand.

(1) $||Y^{(k+1)}||_\infty \approx \rho(A)$,

(2) $\dfrac{Y^{(k+1)}[0]}{X^{(k)}[0]} \approx \dfrac{Y^{(k+1)}[1]}{X^{(k)}[1]} \approx \dfrac{Y^{(k+1)}[2]}{X^{(k)}[2]} \approx \lambda.$

(3) $AX^{(k)} \approx \lambda X^{(k)}$.

3) On pose $u = X^{(k)}$. Trouver $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $u = Qe_1$. En déduire $A_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit approximativement de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$. Grâce à `Puissances`, trouver la valeur propre de A_1 de plus grand module et un vecteur propre associé.

4) Trouver la dernière valeur propre par la même méthode. Pouvait-on la trouver plus simplement ?