Université de Bordeaux
Licences math-info et CMI

Algorithmique mathématique 2
Année 2019–2020

FEUILLE D'EXERCICES n° 8

Travail sur machine noté

Systèmes triangulaires, Gram-Schmidt, Cholesky, moindres carrés

À la fin de la séance, votre fichier est à envoyer à l'adresse

`Arnaud.Jehanne@u-bordeaux.fr`

Il s'agit d'un travail exclusivement expérimental. Aucune justification théorique n'est demandée.

Il est demandé d'indiquer les numéros d'exercices et de questions en commentaires. Il est conseillé de commenter brièvement les fonctions et les résultats obtenus. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation du travail.

Dans l'énoncé, les indices de matrices et de vecteurs commencent à 0.

Exercice 1 – [Systèmes triangulaires]

1) Soit $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A une matrice triangulaire supétieure de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $B \in M_{n,1}(K)$. Pour résoudre l'équation $AX = B$, on peut par exemple utiliser la fonction suivante.

```
def TriangleSup(K,A,B):
    n=B.length()
    X=vector(K,n)
    for i in range(n-1,-1,-1):
        X[i]=A[i,i]^(-1)*(B[i]-sum([A[i,j]*X[j] for j in range(n-1,i-1,-1)]))
    return X
```

Programmer une telle fonction `TriangleSup` qui prend en paramètres K, A et B et qui rend la solution de l'équation $AX = B$.

On pourra tester cette fonction sur $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Écrire la fonction `TriangleInf(K,A,B)` qui s'applique à une matrice A triangulaire inférieure. Dans ce cas, i varie de 0 à $n-1$ et on utilise les X_j pour $j \in [[0, i-1]]$ déjà calculés.

$$X_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(B_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{i,j} X_j \right)$$

On pourra appliquer `TriangleInf` à $K = \mathbb{Q}$, la transposée ${}^tA$ de A et B.

Exercice 2 – [ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT DE TYPE (1)]
Soit b une base de E et soit S une matrice symétrique définie positive. Soit $(.|.)$ le produit scalaire dont la matrice de Gram pour b est égal à S (alors si x et y sont deux éléments de E et si X et Y sont leurs coordonnées dans la base b, $(x|y) = {}^tXSY$).

Programmer une fonction `GS` qui prend en entrées b (donnée comme une liste de vecteurs) et S, et qui en sortie rend l'orthogonalisée de Gram-Schmidt b^* de type (1) de b pour $(.|.)$, ainsi que la matrice de passage U de b^* à b. On travaillera sur le corps $\mathbb{Q}$.

Indications.

(1) Au besoin, voir le rappel en fin d'énoncé, ou bien votre cours.

(2) Si `u=vector([1,1])`, `v=vector([-1,2])` et si M est une matrice de taille 2×2, la commande `u*M*v` donne le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour expérimenter `GS`, on pourra essayer $S = I_2$, $b_0 = (1,1)$ et $b_1 = (1,0)$. On doit trouver

$$b_0^* = (1,1)\ ,\ b_1^* = (1/2, -1/2) \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – [DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY]

1) Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. En utilisant `GS`, calculer l'orthogonalisée e^* de type (1) de la base canonique e de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice de Gram dans e est S.

2) Vérifier que la matrice de Gram de e^* est $D = \mathrm{Diag}(4, 15/4)$. Soit U la matrice de passage de e^* à e. Normalement, on doit obtenir une décomposition de S $S = {}^tUDU$.

3) On cherche à écrire $S = {}^tRR$, où $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,2}(\mathbb{R})$. Cette décomposition est appelée décomposition de Cholesky de S. La matrice R est la matrice dont le coefficient (i,j) est

$$R_{i,j} = \sqrt{D_{i,i}}U_{i,j}$$

Calculer R.

Remarque. On sait avant le calcul que D est diagonale. Il était donc inutile de calculer tous ses coefficients. On aurait pu se contenter de calculer la liste `Dliste` des coefficients diagonaux de D.

4) Écrire une fonction `Cholesky` qui étant donnée une matrice symétrique définie positive S rend la matrice $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tRR$ (on pourra utiliser la fonction `GS`).

Indication. Pour obtenir la base canonique `e` de $\mathbb{R}^n$, on peut utiliser la commande

```
e=identity_matrix(RR,n).columns()
```

Si l'on utilise cette liste, tous les calculs se feront dans $\mathbb{R}$, avec des approximations : pas besoin de modifier `GS`.

5) Appliquer cette fonction à $S = (s_{ij}) \in M_{10}(\mathbb{R})$ où pour tout $(i, j) \in [[0, 9]]^2$,

$$s_{ij} = \min(i, j) + 1$$

6) Construire une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ au hasard et appliquer la fonction `Cholesky` à la matrice $S = {}^tAA$.

Exercice 4 – [Problème des moindres carrés]
Soient $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $m \geqslant n$ et que $\operatorname{rg} A = n$. L'équation $AX = B$ n'a pas nécessairement des solutions. On peut alors essayer de trouver une *solution approchée* : on va chercher $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale. Cela revient à dire que la somme

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} x_j - b_i \right)^2$$

est minimale. Cette question est appelée *problème des moindres carrés*.

On admet le théorème suivant.

Théorème 1. *La norme $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si*

$$(1) \qquad {}^tAAX = {}^tAB$$

Soit $S = {}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$. Alors S est symétrique positive. De plus, comme $\operatorname{rg} A = n$, on peut vérifier que S est définie positive. Ainsi, on peut lui appliquer la fonction `Cholesky` pour trouver $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $S = {}^tRR$. Le problème des moindres carrés se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires

$${}^tRY = {}^tAB \text{ et } RX = Y$$

1) Soient les points de $\mathbb{R}^2$ suivants. $P_0 = (1, -1.9)$, $P_1 = (2, 1.01)$, $P_2 = (3, 4.21)$, $P_3 = (4, 6.8)$, $P_4 = (5, 9)$. On cherche une droite $\mathcal{D}$ (d'équation $y = a_1 x + a_0$) qui approche au mieux ces points "au sens des moindres carrés". C'est-à-dire que l'on cherche $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} ((a_0 + a_1 P_i[0]) - P_i[1])^2$ est minimale. Traduisons cela matriciellement. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1.9 \\ 1.01 \\ 4.21 \\ 6.8 \\ 5.9 \end{pmatrix}$.

On cherche $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX - B||_2$ est minimale.

Trouver cet élément X par la méthode suivante.

(1) Calculer $S = {}^tAA \in M_2(\mathbb{R})$ et $C = {}^tAB \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

(2) Calculer $R \in \mathcal{T}^{++}_{sup,n}$ telle que $S = {}^tRR$ en utilisant `Cholesky`

(3) Résoudre ${}^tRY = C$ en utilisant `TriangleInf`

(4) Résoudre $RX = Y$ en utilisant `TriangleSup`

2) Dessiner sur un même graphe l'ensemble des points P_i et la droite $\mathcal{D}$. Pour cela, si $f = a_1x + a_0$ et si P est la liste des P_i, il suffit d'écrire

```
Droite=plot(f,(x,0,5))
Points=point(P,color="red")
Droite+Points
```

Bien sûr, les couleurs peuvent être choisies au goût de chacun et chacune.

3) Soient les points $P_0 = (1, 1.96)$, $P_1 = (2, -0.12)$, $P_2 = (3, 0.55)$, $P_3 = (4, 2.84)$, $P_4 = (5, 8.16)$. En suivant la même méthode que précédemment, trouver la parabole (d'équation $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$) qui approche au mieux ces points "au sens des moindres carrés".

4) Dessiner ces points et cette parabole sur un graphe.

Rappel - [ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT]

Soient E un espace euclidien. On note $(.|.)$ son produit scalaire et $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Soit $b = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ une base de E.

Il n'y a pas unicité de l'orthogonalisée de Gram-Schmidt, mais on peut imposer une condition pour obtenir cette unicité (en fait, il y a unicité à multiplication près de chaque vecteur par un même réel strictement positif). Le cours évoque les deux possibilités suivantes pour cette condition supplémentaire (mais bien sur, il y a d'autres choix possibles).

(1) les coefficients diagonaux de la matrice de passage sont égaux à 1.

(2) l'orthogonalisée de Gram-Schmidt est orthonormale, et les coefficients diagonaux de la matrice de passage sont strictement positifs. On dira alors que c'est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à b.

Nous décrivons ci-dessous un algorithme pour l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de type (1) (algorithme vu en cours). Soit $b^* = (b^*_0, \ldots, b^*_{n-1})$ l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de b telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de b à b^* sont égaux à 1. Pour tout j, et pour tout $i \in [[0, j-1]]$, on pose

$$y_{ij} = \frac{(b_j|b^*_i)}{(b^*_i|b^*_i)}.$$

Alors

$$b^*_j = b_j - \sum_{i=0}^{j-1} y_{ij} b^*_i.$$

Si l'on pose $y_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $y_{jj} = 1$ pour tout j, la matrice $U = (y_{ij})$ est la matrice de passage de b^* à b.