Université Bordeaux 1 | **MHT 631 – Licence**
Mathématiques | Année 2017–2018

# FEUILLE D'EXERCICES n° 9
## Calcul du polynôme caractéristique et des valeurs propres
## Espaces euclidiens

### Corrigé de l'exercice 4

**Exercice 4** - *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E$ l'application $q$ par*

$$q(P) = \int_0^1 P^2(t)dt.$$

**1)** *Montrer que $q$ est une forme quadratique.*

**2)** *Montrer que $E$ muni de $q$ est euclidien.*

**3)** *Déterminer une base orthonormale de $E$.*

**1)** On trouve que la forme bilinéaire associée à $q$ est

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

**2)** Montrons que $q$ est définie positive. $q(P)$ est l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction positive, donc $q(P) \geqslant 0$ pour tout $P$ dans $E$. Soit $P \in E$. Si $q(P) = 0$ si

$$\int_0^1 P^2(t)dt = 0.$$

C'est l'intégrale d'une fonction positive $P(t)^2$. Comme cette fonction est continue, cette intégrale ne peut être nulle que si $P(t) = 0$ pour tout $t$ dans $[0,1]$. Dans ce cas, le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc il est nul. Ainsi, si $P \neq 0$, $q(P) > 0$.

**3)** Rappel : soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien. $b = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de $E$. Soit $b^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ l'orthogonalisée de gram-schmidt de $b$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de $b$ à $b^*$ sont égaux à 1. Alors pour tout $j$,

$$b_j^* = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(b_j|b_i^*)}{(b_i^*|b_i^*)} b_i^*.$$

Ainsi, $b_1^* = b_1$. Ensuite, on peut calculer

$$b_2^* = b_2 - \frac{(b_2|b_1^*)}{(b_1^*|b_1^*)} b_1^*$$

puis $b_3^*$, etc.

Soit $b = (1, X, X^2)$. $b$ est une base de $E$. Calculons d'abord l'orthogonalisée $b^*$ de Gram-Schmidt associée à $b$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de $b$ à $b^*$ sont égaux à 1. On note $b^* = (P_0, P_1, P_2)$.

Au cours des calculs, on rencontrera les $(X^i|X^j)$ pour $i, j \in [[0,2]]$.

$$(1) \qquad (X^i|X^j) = \int_0^1 t^i t^j dt = \int_0^1 t^{i+j} dt = \frac{1}{i+j+1}$$

Faisons maintenant les calculs. Pour $P_0$, c'est facile.

$$P_0 = 1$$

$P_1$ maintenant :

$$\begin{aligned} P_1 &= X - \frac{(X|P_0)}{(P_0|P_0)} P_0 \\ &= X - \frac{(X|1)}{(1|1)} 1 \\ &= X - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et enfin, $P_2$ :

$$P_2 = X^2 - \frac{(X^2|P_0)}{(P_0|P_0)} P_0 - \frac{(X^2|P_1)}{(P_1|P_1)} P_1.$$

Ici, $P_1 = X - \frac{1}{2}$, donc

$$(X^2|P_1) = (X^2|X) - \frac{1}{2}(X^2|1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

et

$$(P_1|P_1) = (X|X) - (1|X) + \frac{1}{4}(1|1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Comme d'autre part $(X^2|P_0) = \frac{1}{3}$ et $(P_0|P_0) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} P_2 &= X^2 - \frac{1}{3} - (X - \frac{1}{2}) \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Si pour tout $i$, $Q_i = \frac{P_i}{\sqrt{(P_i|P_i)}}$, alors $(Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base orthonormale de $E$. On a déjà calculé $(P_0|P_0) = 1$ et $(P_1|P_1) = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} (P_2|P_2) &= (X^2|X^2) + (X|X) + \frac{1}{36}(1|1) - 2(X|X^2) + \frac{1}{3}(X^2|1) - \frac{1}{3}(X|1) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

Finalement, $Q_0 = 1$, $Q_1 = \sqrt{6}(X - \frac{1}{2})$ et $Q_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

**Remarque.** Grâce au calcul des $(X^i|X^j)$ de l'égalité (1), on voit que la matrice de Gram $S$ de $(.|.)$ dans la base $1, X, X^2$ est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

On aurait pu utiliser cette matrice pour le calcul des produits scalaires. Cela revient au même. Par exemple, le vecteur des coordonnées de $P_2$ dans $(1, X, X^2)$ est $V = {}^t(1/6, -1, 1)$. Alors $(P_2|P_2) = {}^tVSV$.