Devoir Surveillé, 20 novembre 2012
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que les itérations des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel (pour la résolution d'une équation $AX = B$) sont respectivement $X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B$ et $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}B$, avec les notations du cours. On rappelle aussi que si la matrice d'itération d'une méthode donnée est M, son taux de convergence est $R(M) = -\log \rho(M)$.

1) Discuter en fonction de a la convergence pour tout $X^{(0)}$ de la méthode de Jacobi.

2) Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

3) Dans le cas où les deux méthodes convergent pour tout $X^{(0)}$, comparer leurs taux de convergence.

Exercice 2 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que si i et j sont deux entiers de $\{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, alors $a_{i,j}^2 < a_{i,i}a_{j,j}$.

Exercice 3 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Rappeler pourquoi si A est définie positive, alors $\det A > 0$.

2) Donner un exemple où A n'est pas positive et où $\det A > 0$.

3) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note A_k la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i, j) est égal à $a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, k\}^2$. Montrer que si A est définie positive, alors $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

4) On suppose que A_{n-1} est définie positive. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où $0_{1,n-1}$ et $0_{n-1,1}$ sont le vecteur ligne nul et le vecteur colonne nul de taille $n-1$.

5) Soient n nombres réels $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. On définit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer $U \in \mathcal{T}_{n,s}^{++}(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux égaux à 1 et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = {}^tUDU$.

b) Montrer que M est définie positive si et seulement si $\det M > 0$.

6) Montrer que si $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, alors A est définie positive.

7) Calculer l'inverse de M dans le cas où $\alpha = n$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 1$.