Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques Année 2013–2014

Devoir Surveillé, 16 octobre 2013
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.

2) Calculer $\det A$.

Exercice 2 – Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une L-matrice si $m_{ii} > 0$ pour tout i, et si $m_{ij} \leqslant 0$ pour tout (i,j) tel que $i \neq j$.

Soit A une L-matrice inversible telle que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls. On note $e = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ et $d = A^{-1}e$.

1) Montrer que les coordonnées d_i de d sont strictement positives. En déduire que $\Delta = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ est inversible.

2) Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Calculer le coefficient (i,j) de $\Delta^{-1}A\Delta$.

3) Montrer que $\Delta^{-1}A\Delta$ est à diagonale strictement dominante (on pourra considérer le vecteur $\Delta^{-1}A\Delta e$).

Exercice 3 – Dans cet exercice, on note $||.||$ la norme $||.||_2$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme qu'elle induit sur $\mathcal{M}_n(R)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit y une solution de l'équation différentielle

$$(1) \qquad Y'(t) = AY(t)$$

a) Rappeler l'expression de la solution générale de (1).

b) Soient t et t' deux réels. Montrer que $y(t + t') = \exp(t'A)y(t)$.

c) Montrer que $\frac{d}{dt}||y(t)||^2 = 2\ {}^t y(t)Ay(t)$.

2) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $||\exp(tA)|| \leqslant 1$. Montrer que pour toute solution y de (1), l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à t associe $||y(t)||$ est décroissante. En déduire que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t xAx \leqslant 0$ (on pourra pour cela considérer une solution de (1) telle que $y(0) = x$).

3) Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t xAx \leqslant 0$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||\exp(tA)x|| \leqslant ||x||$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que

$$\frac{||\exp(tA)x||}{||x||} \geqslant ||\exp(tA)|| - \varepsilon.$$

c) En déduire que $||\exp(tA)|| \leqslant 1$.