Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques Année 2013–2014

Devoir Surveillé, 20 novembre 2013
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que les itérations des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel (pour la résolution d'une équation du type $AX = B$) sont respectivement $X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B$ et $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}B$, avec les notations du cours.

1) Discuter en fonction de a la convergence pour tout $X^{(0)}$ de la méthode de Jacobi.

2) Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 2 – Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que S est symétrique définie positive et déterminer sa décomposition de Cholesky. En déduire S^{-1}.

Exercice 3 – Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient (i,j) de A.

1) Soit $X = {}^t(1,1,\dots,1) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [[1,n]]$, exprimer la i-ème coordonnée de AX en fonction des coefficients de A.

2) Montrer que $|\sum_{i,j} a_{ij}| \leqslant n$.

Exercice 4 –

1) Montrer que l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est égal à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $A_1, A_2, \dots, A_r$ des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des nombres réels. On pose

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| A_i.$$

a) Montrer que s'il existe $i \in [[1,r]]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, alors $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $|{}^tXAX| \leqslant {}^tXBX$.
c) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B = C^2$.
d) Soit $A' = C^{-1}AC^{-1}$. Montrer que $A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et que $|{}^tXA'X| \leqslant {}^tXX$.
e) Montrer que $|\det A'| \leqslant 1$, et en déduire que $|\det A| \leqslant \det B$.