

DM

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre l'équation $AX = B$ et décomposer A sous la forme $PA = LU$.
- 2) En déduire $\det A$.
- 3) Calculer L^{-1} et U^{-1} . En déduire A^{-1} .

Exercice 2 – On considère l'application de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\|A\|_s = \sqrt{\operatorname{Tr}({}^t\overline{A}A)}.$$

- 1) Montrer que

$$\|A\|_s = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

- 2) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme de $M_n(K)$. On l'appelle norme de Schur.
- 3) Montrer que $\|\cdot\|_s$ n'est pas une norme induite par une norme de K^n .
- 4) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle.
- 5) Montrer que la norme de Schur est compatible avec la norme $\|\cdot\|_2$ sur $M_{n,1}(K)$.
- 6) Montrer que

$$\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

Exercice 3 – Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $M_n(K)$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note Cond le conditionnement associé à cette norme.

Soient $A \in \operatorname{GL}_n(K)$. On suppose que l'on ne connaît qu'une valeur approchée $A + \Delta A$ de A . On suppose que cette matrice $A + \Delta A$ est aussi inversible, et on souhaite majorer l'erreur commise si l'on calcule $(A + \Delta A)^{-1}$ au lieu de A^{-1} .

- 1) Montrer que

$$(A + \Delta A)^{-1}(I + (\Delta A)A^{-1}) = A^{-1}.$$

- 2) Montrer que

$$\frac{\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \Delta A)^{-1}\|} \leq \operatorname{Cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$