

DM 2

Exercice 1 – Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que S est symétrique définie positive et déterminer sa décomposition de Cholesky. En déduire S^{-1} .

Exercice 2 – Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $A = {}^tRR$ sa décomposition de Cholesky. On note $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $R = (r_{ij})_{i,j}$.

1) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, exprimer a_{ii} en fonction des coefficients r_{kl} de R .

2) Montrer que

$$\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

3) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si A est diagonale.

Exercice 3 –

1) Montrer que l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est égal à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $A_1, A_2, \dots, A_r$ des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des nombres réels. On pose

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=1}^r |\lambda_i| A_i.$$

a) Montrer que s'il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$, alors $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $|{}^tXAX| \leq {}^tXBX$.

c) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B = C^2$.

d) Soit $A' = C^{-1}AC^{-1}$. Montrer que $A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et que $|{}^tXA'X| \leq {}^tXX$.

e) Montrer que $|\det A'| \leq 1$, et en déduire que $|\det A| \leq \det B$.