Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques Année 2014–2015

Devoir Surveillé, 5 novembre 2014
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.

2) Calculer $\det A$. Calculer L^{-1} et U^{-1} et en déduire A^{-1}.

Exercice 2 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(K)$. Pour tout élément V de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, on note V_i la i-ème coordonnée de V. On pose

$$\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)$$

et on suppose que $\delta > 0$.

1) Montrer que A est inversible.

2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \smallsetminus \{0\}$. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $|X_i| = ||X||_\infty$. Montrer que $|(AX)_i| \geqslant \delta ||X||_\infty$. En déduire que $||AX||_\infty \geqslant \delta ||X||_\infty$.

3) Montrer que $|||A^{-1}|||_\infty \leqslant \delta^{-1}$.

4) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\mathrm{Cond}_\infty(A) \leqslant |||A|||_\infty$.

Exercice 3 – Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale, c'est-à-dire telle que $a_{ij} = 0$ dès que $|i-j| > 1$. On décompose $A = D+L+U$, où D est diagonale, L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure et où les coefficients diagonaux de L et de U sont nuls. On rappelle que les matrices d'itération pour la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont respectivement égales à $J = -D^{-1}(L+U)$ et $G = -(D+L)^{-1}U$.

Pour toute matrice M, on note χ_M son polynôme caractéristique.

1) Soit μ un réel non nul et soit $S = \mathrm{Diag}(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$. Montrer que

$$S^{-1}AS = D + \mu^{-1}L + \mu U.$$

2) Montrer que pour tout réel x non nul

$$\det(D+L)\chi_G(x) = \left(\sqrt{x}\right)^n \det\left(\sqrt{x}D + \sqrt{x}L + \frac{1}{\sqrt{x}}U\right).$$

3) Montrer que $\chi_G(x) = (\sqrt{x})^n \chi_J(\sqrt{x})$ (on pourra utiliser la question 1 en remplaçant la matrice A et le réel μ par une autre matrice et un réel bien choisis).

4) Montrer que $\rho(G) < 1$ si et seulement si $\rho(J) < 1$. En déduire que dans le cas des matrices tridiagonales, la convergence pour tout vecteur initial des méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel a lieu simultanément.