

FEUILLE D'EXERCICES n° 1

Théorème de Gerschgorin-Hadamard

Exercice 1 –

1) La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Si oui, la diagonaliser.

3) Vérifier que les valeurs propres de A sont bien dans l'ensemble prévu par le théorème de Gerschgorin-Hadamard.

Exercice 2 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calculer les valeurs propres de A que $\rho(A) \leq 8$.

Exercice 3 – Trouver une matrice inversible pour laquelle $0 \in \cup_k D_k$ (avec les notations du cours).

Exercice 4 – Trouver une matrice à diagonale dominante non inversible.

Exercice 5 – Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante telle que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in [[1, n]]$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A ,

$$\operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Exercice 6 – On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est réductible s'il existe une partition de $\{1, \dots, n\}$ en deux ensembles I et J telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Dans le cas contraire, on dit que A est irréductible.

On veut démontrer le second théorème de Gerschgorin-Hadamard suivant.

Théorème 1. *Soit $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible. Si une valeur propre λ de A n'est dans l'intérieur d'aucun des disques de Gerschgorin D_k , alors tous les cercles de Gerschgorin passent par λ .*

1) Soit donc $A \in M_n(K)$ une matrice irréductible, et soit λ comme dans le théorème. Soit $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ . On pose

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : |x_i| = \max_j |x_j| \right\}.$$

Montrer que si $i \in I$, alors

$$|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}|(|x_i| - |x_j|) = 0.$$

2) En déduire que $I = \{1, \dots, n\}$, et conclure la démonstration du théorème 1.

Exercice 7 – Soit A dans $M_{n,n}(K)$. On dit que A est à diagonale fortement dominante si A est à diagonale dominante et s'il existe un indice k pour lequel

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|.$$

1) Soit $A \in M_{2,2}(K)$ à diagonale fortement dominante. Montrer que si $a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1$ et 2 , alors A est inversible.

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe des matrices à diagonale fortement dominante non inversibles.

3) En utilisant l'exercice 6, montrer que toute matrice de $M_n(K)$ irréductible et à diagonale fortement dominante est inversible.

4) Donner un exemple de matrice à diagonale fortement dominante réductible, inversible et qui ne soit pas à diagonale strictement dominante.