

FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Normes de K -espaces vectoriels

Exercice 1 – Pour tout x dans K^n , on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Montrer que ces trois expressions définissent des normes sur K^n .

Exercice 2 – Montrer la transitivité de la relation d'équivalence de norme.

Exercice 3 – Soit $E = l_1(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles sommables. Soient N_1 et N_∞ définies sur E par

$$N_1(x) = \sum |x_i| \text{ et } N_\infty(x) = \sup |x_i|.$$

1) Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes de E .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $x_k^{(n)} = 1$ si $0 \leq k \leq n$ et $x_k^{(n)} = 0$ si $k > n$. Calculer $N_1(x^{(n)})$ et $N_\infty(x^{(n)})$.

3) Montrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 – Soit $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ainsi, E est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension 2. On définit N_1 et N_2 de la manière suivante. Si $(a, b) \in \mathbb{Q}$,

$$N_1(a, b) = |a + b\sqrt{2}| \text{ et } N_2(a, b) = |a| + |b|.$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes de E .

2) Montrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 5 – Nous allons montrer que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

1) Soit N une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on ait $N(x) \leq \alpha \|x\|_\infty$.

2) Montrer que l'application N de $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^+$, muni de la valeur absolue, est continue.

3) Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que S est fermé et borné pour la topologie associée à $\|\cdot\|_\infty$. En déduire que S est un compact pour cette topologie.

4) Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 6 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K . Montrer que toutes les normes de E sont équivalentes. On pourra utiliser l'exercice 3.

Exercice 7 – On généralise ici les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ vues en cours. Soit $p \geq 1$ un entier naturel. On définit sur K^n l'application $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme. On pourra pour cela utiliser l'inégalité de Hölder qui affirme que si $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont dans $\mathbb{C}^n$, alors

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q},$$

où q est tel que $1/p + 1/q = 1$. Pour en déduire l'inégalité triangulaire, appliquer l'inégalité de Hölder à (a_i) et $(a_i + b_i)^{p-1}$ ainsi qu'à (b_i) et $(a_i + b_i)^{p-1}$.

2) Prouver l'inégalité de Hölder. Pour cela, on peut :

- montrer que si $u, v \geq 0$, alors (concavité du logarithme)

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

- sommer sur

$$u_i = \frac{|a_i|}{(\sum |a_i|^p)^{1/p}} \text{ et } v_i = \frac{|b_i|}{(\sum |b_i|^q)^{1/q}}.$$

3) Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 8 – Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Soient $\|\cdot\|_E$ une norme sur E , $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et u une application linéaire de E dans F . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) u est continue.
- (2) u est continue en 0.
- (3) Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E.$$

- (4) u est lipschitzienne, c'est-à-dire : il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in E$,

$$\|u(x) - u(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$