

FEUILLE D'EXERCICES n° 3

Normes matricielles

Exercice 1 – L'application ρ est-elle une norme de $M_n(K)$?

Exercice 2 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$. Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Exercice 3 – On considère l'application de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(K)$.
- 2) Montrer que si N est une norme de $M_n(K)$ induite par une norme de K^n , alors $N(I) = 1$.
- 3) Qu'en déduire sur $\|\cdot\|$?
- 4) La norme $\|\cdot\|$ est-elle une norme matricielle ?

Exercice 4 – Donner un exemple de norme de $M_n(K)$ qui ne soit pas matricielle.

Exercice 5 – Pour chacune des matrices A suivantes,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trouver une matrice Q orthogonale telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

Exercice 6 – Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On se propose ici de démontrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}.$$

- 1) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que

$${}^tAA = {}^tQDQ.$$

- 2) Montrer que

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|y\|_2=1} {}^tyDy = \rho(D).$$

Conclure.

- 3) Transposer ce résultat au cas complexe.

Exercice 7 –

- 1) Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\text{GL}_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$ (on pourra utiliser une suite de la forme $A + \frac{1}{k}I_n$).
- 2) En déduire que dans $M_n(K)$, le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA .
- 3) Montrer ce résultat dans le cas plus général où K est un anneau commutatif quelconque, en calculant le produit suivant.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & -A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 –

- 1) Montrer qu'à toute norme matricielle on peut associer une norme de K^n avec laquelle elle est compatible.
- 2) Montrer que pour toute norme matricielle N de $M_n(K)$ et toute matrice A on a

$$\rho(A) \leq N(A).$$

- 3) Soit $N(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Est-ce une norme sur $M_n(K)$? Montrer que si $n \geq 2$, il existe $A \in M_n(K)$ telle que $\rho(A) > N(A)$.

Exercice 9 – On considère l'application de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\|A\|_s = \sqrt{\text{Tr}({}^t\bar{A}A)}.$$

- 1) Montrer que

$$\|A\|_s = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

- 2) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme de $M_n(K)$. On l'appelle norme de Schur.
- 3) Montrer que $\|\cdot\|_s$ n'est pas une norme induite par une norme de K^n .
- 4) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle.
- 5) Montrer que la norme de Schur est compatible avec $\|\cdot\|_2$.
- 6) montrer que

$$\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$