

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

Suites de matrices et de vecteurs

Exercice 1 – Soient $B \in M_n(K)$ et $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite de matrices de $M_n(K)$ vérifiant

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k B) = I_n.$$

Montrer que B est inversible et que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = B^{-1}.$$

Exercice 2 – Soit $M \in M_n(K)$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} M^k \text{ converge} \iff \rho(M) < 1$$

et que dans ce cas, $I_n - M$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$.

Exercice 3 – Soit A un élément de $M_n(K)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) A est nilpotente.
- (2) $\text{Spec}(A) = \{0\}$.
- (3) $A^n = 0$.
- (4) Pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, $\text{Tr}(A^k) = 0$.
- (5) Il existe une suite de matrices (B_n) semblables à A qui tend vers 0.

Exercice 4 – Soit $A \in M_n(K)$ vérifiant $\rho(A) < 1$ et $B \in K^n$. On considère la suite $(X_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de K^n définie par la donnée de X_0 et la relation de récurrence

$$X_{k+1} = AX_k + B \text{ pour tout } k \geq 0.$$

La suite (X_k) converge-t-elle, et si oui, vers quel élément de K^n ?

Exercice 5 – Soient $A, B \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$ tels que

$$AB - BA = \lambda A.$$

Montrer que A est nilpotente.

Exercice 6 – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$). Dans quels cas la suite (A^n) converge-t-elle ?