

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Pivot de Gauss - Décomposition LU

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre $AX = B$ et décomposer A sous la forme LU .
- 2) Calculer $\det A$.
- 3) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$. Pour $i \in [[1, 3]]$, résoudre l'équation $LX = e_i$. En déduire L^{-1} . Calculer U^{-1} de la même façon, puis calculer A^{-1} .

Exercice 2 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre $AX = B$, et trouver une permutation σ de S_3 telle que P_σ se décompose sous la forme LU et expliciter cette décomposition.
- 2) Calculer $\det A$ et A^{-1} .

Exercice 3 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver une permutation σ de S_4 telle que P_σ se décompose sous la forme LU et expliciter cette décomposition.
- 2) Calculer $\det A$ et A^{-1} .

Exercice 4 – [UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION LU]

Soit A une matrice de $\text{GL}_n(K)$ admettant une décomposition LU . Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 5 – [PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL]

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$. On veut prouver qu'il existe $\sigma \in S_n$, L triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux valent 1 et U triangulaire supérieure telles que

$$P_\sigma A = LU.$$

- 1) Montrer que si $a_{1,1} = 0$, alors il existe $i > 1$ tel que $a_{i1} \neq 0$.
- 2) En déduire qu'il existe une permutation $\sigma_1 \in S_n$ (en fait, l'identité ou une transposition $(1, i)$ où $1 < i \leq n$) et une matrice triangulaire inférieure L'_1 dont les termes diagonaux valent 1 et dont les termes non diagonaux sont nuls s'ils n'appartiennent pas à la colonne 1, telles que $B_1 = L'_1 P_{\sigma_1} A$ ait tous les termes de sa colonne 1 nuls à l'exception du premier.

3) Montrer, en notant $B = B_1$ pour simplifier, que si $b_{22} = 0$, il existe $i > 2$ tel que $b_{i2} \neq 0$.

4) En déduire qu'il existe une permutation $\sigma_2 \in S_n$ (en fait, l'identité ou une transposition $(2, i)$ où $2 < i \leq n$) et une matrice triangulaire inférieure L'_2 dont les termes diagonaux valent 1 et dont les termes non diagonaux sont nuls s'ils n'appartiennent pas à la colonne 2, telles que $B_2 = L'_2 P_{\sigma_2} B_1$ ait tous les termes de sa colonne 1 nuls à l'exception du deuxième et éventuellement du premier.

5) Montrer qu'en poursuivant cette construction, on arrive à une égalité de la forme

$$L'_{n-1} P_{\sigma_{n-1}} L'_{n-2} P_{\sigma_{n-2}} \dots L'_1 P_{\sigma_1} A = U$$

où U est triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls, où chaque σ_i est soit l'identité, soit une transposition (i, j) avec $i < j$, et où chaque L'_i est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux valent 1 et dont les termes non diagonaux sont nuls s'ils n'appartiennent pas à la colonne i .

6) Montrer que pour une telle matrice L'_i , si $\sigma = (kl)$ avec $i < k < l$, la matrice $P_\sigma L'_i P_\sigma$ est de même forme que L'_i . Montrer que c'est en fait la matrice L'_i où l'on a échangé les coefficients (k, i) et (l, i) .

7) En déduire que

$$L'_{n-1} P_{\sigma_{n-1}} L'_{n-2} P_{\sigma_{n-2}} \dots L'_1 P_{\sigma_1} = L''_{n-1} \dots L''_1 P_\sigma$$

où $\sigma \in S_n$ et où chaque L''_i est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent 1 et dont tous les termes non diagonaux sont nuls s'ils n'appartiennent pas à la colonne i .

8) En déduire le théorème.

9) Montrer que pour P_σ donné, le couple (L, U) est unique.

Exercice 6 – [DÉCOMPOSITION $A = LU$]

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note A_k la matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}$. Montrer que A admet une décomposition $A = LU$ si et seulement si A_k est inversible pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et que dans ce cas, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{kk} = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}},$$

avec la notation $A_0 = 1$.

Exercice 7 – [MATRICES SYMÉTRIQUES ET DÉCOMPOSITION LU]

1) Montrer que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et si A admet une décomposition LU , alors il existe une matrice diagonale D réelle telle que $A = LD {}^t L$.

2) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice D diagonale réelle à termes diagonaux strictement positifs et L triangulaire inférieure à éléments diagonaux égaux à 1 telles que $A = LD {}^t L$.