

FEUILLE D'EXERCICES n° 6

Décomposition LU , coût, conditionnement

Exercice 1 – Soit $A \in \text{GL}_n(K)$. Calculer le nombre total maximal d'opérations arithmétiques (additions, soustractions, multiplications, divisions) effectuées pour inverser A en utilisant une décomposition $PA = LU$.

Exercice 2 – Pour résoudre $A^2X = B$ connaissant A et B , vaut-il mieux calculer A^2 puis appliquer le pivot de Gauss, ou procéder autrement ?

Exercice 3 – On munit $M_{n,1}(K)$ d'une norme $\|\cdot\|$, on note $|||\cdot|||$ la norme de $M_n(K)$ subordonnée et Cond le conditionnement associé. Soient $A \in \text{GL}_n(K)$ et $B \in M_n(K)$. On souhaite résoudre l'équation $AX = B$. Soit ΔX l'erreur commise si l'on perturbe A de ΔA . C'est-à-dire

$$(A + \Delta A)(X + \Delta X) = B.$$

Montrer que

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}.$$

Exercice 4 – Soit $A \in M_n(K)$.

1) Montrer que

$$\text{Cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\max\{\lambda : \lambda \in \text{Spec}({}^t\overline{A}A)\}}{\min\{\lambda : \lambda \in \text{Spec}({}^tAA)\}}}.$$

2) Montrer que si $A = {}^t\overline{A}$, alors

$$\text{Cond}_2(A) = \frac{\max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A)\}}{\min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A)\}}.$$

3) Montrer que si A est réelle orthogonale ou complexe unitaire, alors $\text{Cond}_2(A) = 1$.

Exercice 5 – Soient N une norme matricielle de $M_n(K)$ et Cond le conditionnement associé. Démontrer les propriétés suivantes.

1) Si $\alpha \in K \setminus \{0\}$ et $A \in M_n(K)$, alors $\text{Cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A)$.

2) Soient A et $B \in M_n(K)$.

$$\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B).$$

3) Si N est une norme induite, alors $\text{Cond}(A) \geq 1$.

Exercice 6 – [INDÉPENDANCE ENTRE DÉTERMINANT ET CONDITIONNEMENT]

Soit $A \in M_n(K)$ décomposée par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

où $1 \leq p \leq n-1$ et où $B \in M_{p,n-p}(K)$.

1) Quel est le déterminant de A ? Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2) On rappelle que la norme de Schur $\| \cdot \|_s$ est définie par

$$\|A\|_s = \sqrt{\text{Tr}({}^t\overline{A}A)} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

On appelle Cond_s le conditionnement relatif à cette norme. Montrer que

$$\text{Cond}_s(A) = n + \|B\|_s^2.$$

3) Calculer $\text{Cond}_2(A)$ en fonction de $\|A\|_2$.

Exercice 7 – [INDÉPENDANCE ENTRE DÉTERMINANT ET CONDITIONNEMENT]

Soit $A \in M_n(K)$ la matrice définie par : $a_{i,i} = 1$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = 2$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$ et $a_{i,j} = 0$ pour les autres (i,j) . Soient E et $U \in M_n(K)$ définies par : $e_{i,i-1} = 1$ pour tout i tel que $2 \leq i \leq n$ et $e_{i,j} = 0$ pour les autres (i,j) , $u_{i,j} = 1$ si $i \leq j$ et $u_{i,j} = 0$ sinon. Soit enfin B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer A^{-1} .

2) Calculer $\text{Cond}_1(A)$ et $\text{Cond}_\infty(A)$. Comparer avec $\det A$.

3) Montrer que $B = (2I - E)U$.

4) Montrer que $U^{-1} = I - {}^tE$.

5) Montrer que

$$(I - \frac{1}{2}E)^{-1} = I + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}E^2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}E^{n-1}.$$

6) En déduire B^{-1} et calculer $\|B^{-1}\|_\infty$.

7) Montrer que $\text{Cond}_\infty(B) \sim 2n$ quand n tend vers ∞ . Comparer avec $\det B$.

Exercice 8 – Soit $G_\varepsilon \in M_n(K)$ la matrice suivante.

$$G_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda + \varepsilon & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda + 2\varepsilon & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda + (n-1)\varepsilon \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que si $\varepsilon > 0$, alors G_ε est diagonalisable.

2) Montrer que $\|G_\varepsilon - G_0\|_\infty = (n-1)\varepsilon$.

3) Soit S_ε la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de G_ε (dans le bon ordre) de première composante 1. Vérifier que S_ε est triangulaire supérieure.

4) Quelle est la limite de S_ε quand ε tend vers 0 ?

5) Calculer $\text{Cond}_\infty(S_\varepsilon)$ pour $n = 2$.

6) Quelle est la limite de $\text{Cond}_\infty(S_\varepsilon)$ quand ε tend vers 0 ?