

FEUILLE D'EXERCICES n° 7

Méthodes itératives

Exercice 1 – Le but de cet exercice est de montrer sur des exemples qu'on ne peut rien dire en général de la comparaison entre les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour chacune de ces matrices, calculer le rayon spectral de la matrice d'itération correspondant à la méthode de Jacobi, puis de Gauss Seidel (c'est-à-dire $-D^{-1}(L+U)$ et $-(D+L)^{-1}U$ avec les notations du cours).

Exercice 2 – Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

On considère la méthode itérative définie par $X^{(k+1)} = AX^{(k)} - C$ et par la donnée de $X^{(0)}$.

- 1) Vérifier que si $(X^{(k)})$ converge, alors elle converge vers $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 2) On choisit pour initialiser les itérations le vecteur $\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $X^{(k)}$ en fonction de ε . La suite $(X^{(k)})$ converge-t-elle vers X ?
- 3) On choisit maintenant $\begin{pmatrix} 1 + 2\varepsilon \\ 1 - 9\varepsilon \end{pmatrix}$. Analyser les différences.

Exercice 3 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On considère la matrice R_ω de l'itération de relaxation liée à la méthode de Gauss-Seidel, c'est-à-dire

$$R_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U).$$

- 1) Calculer les valeurs propres de A_ω et son rayon spectral.
- 2) Pour quelles valeurs de ω la méthode de relaxation converge-t-elle pour tout vecteur initial $X^{(0)}$?
- 3) Déterminer la valeur de ω pour laquelle $\rho(R_\omega)$ est minimal.

Exercice 4 – Pour une matrice $A \in \text{GL}_n(K)$ et un système $AX = B$, on utilise la méthode de relaxation de paramètre $\omega \neq 0$. On itère donc la matrice

$$A_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$$

(notations du cours) que l'on peut encore écrire

$$A_\omega = (I_n + \omega L')^{-1}((1 - \omega)I_n - \omega U')$$

avec $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$.

- 1) Montrer que $\rho(A_\omega) \geq |\omega - 1|$ (on pourra faire une estimation du produit des valeurs propres de A_ω).
- 2) En déduire qu'une condition nécessaire pour que la méthode converge pour tout $X^{(0)}$ est que $0 < \omega < 2$.