

FEUILLE D'EXERCICES n° 8

Espaces euclidiens

Exercice 1 – Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient b une forme bilinéaire symétrique positive sur E , q la forme quadratique associée et soient x et y deux éléments de E . Montrer que

$$|b(x, y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}.$$

Donner un exemple où $|b(x, y)| = \sqrt{q(x)q(y)}$ et où x et y sont libres.

Exercice 2 – Soit $E = \mathbb{R}^n$. On définit l'application q par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2$$

où (a_i) vérifie

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 < 1.$$

- 1) Montrer que q est une forme quadratique.
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien.

Exercice 3 – Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = \int_0^1 P^2(t) dt.$$

- 1) Montrer que q est une forme quadratique.
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien.
- 3) Déterminer une base orthonormale de E .

Exercice 4 – Soit $(a_i) \in \mathbb{R}^n$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = \sum_{i=0}^n (P^{(i)}(a_i))^2.$$

- 1) Montrer que q est une forme quadratique.
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien.

Exercice 5 – Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. On définit sur E l'application q par

$$q(M) = \text{Tr}({}^t M M).$$

- 1) Montrer que q est une forme quadratique.
- 2) Montrer que E muni de q est euclidien.
- 3) Déterminer une base orthonormale de E .

Exercice 6 – Soit E un espace euclidien. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et q la forme quadratique associée.

- 1) Soit u une application de E dans E telle que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Montrer que u est un automorphisme de E .

- 2) Soit u une application de E dans E vérifiant $u(0) = 0$ et

$$q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$$

pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer que u est un automorphisme de E .