

FEUILLE D'EXERCICES n° 9

Espaces euclidiens, matrices symétriques positives, décomposition de Cholesky

Exercice 1 – [INÉGALITÉ DE HADAMARD]

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Dans le cas où A est inversible, on pourra pour cela utiliser la décomposition QR de A .

2) Montrer que

$$|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 2 – On considère $(a_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit sur E l'application q par

$$q(P) = \sum_{i=0}^n (P^{(i)}(a_i))^2.$$

On a vu que q est une forme quadratique définie positive.

1) Montrer qu'il existe une famille de polynôme $(P_k)_{0 \leq k \leq n} \in E^{n+1}$ orthonormée pour le produit scalaire défini par q telle que $\deg P_k = k$ pour tout k .

2) Montrer qu'on peut choisir les P_k de telle sorte que $P_k^{(i)}(a_i) = \delta_{ik}$ pour tout entier $k \in [[0, n]]$ et tout $i \in [[0, k]]$.

3) Calculer les P_k lorsque $a_i = a \in \mathbb{R}$ pour tout i .

Exercice 3 – Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ positive.

1) Montrer que pour tout i , $a_{ii} \geq 0$.

2) Montrer que

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}.$$

Exercice 4 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour tout $k \in [[1, n]]$, on note A_k la matrice de $\mathcal{M}_k(K)$ dont le coefficient (i, j) est égal à $a_{i,j}$. On a vu en exercice que A admet une décomposition LU si et seulement si $\det A_k \neq 0$ pour tout $k \in [[1, n]]$.

- 1) En utilisant ce fait, montrer que toute matrice réelle définie positive admet une décomposition LU .
- 2) Retrouver ce résultat en utilisant la décomposition de Cholesky de A .
- 3) Donner un exemple de matrice symétrique inversible n'admettant pas de décomposition LU .

Exercice 5 – Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Déterminer la décomposition de Cholesky de S , si elle existe. Montrer que S est symétrique définie positive.

Exercice 6 –

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- 1) Appliquer la méthode de décomposition de Gauss à la forme quadratique associée à S .
- 2) Cette matrice S est-elle définie positive ?
- 3) Donner une matrice $U \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $S = {}^t U D U$.

Exercice 7 – Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ positives.

- 1) Montrer que $A + B$ est positive.
- 2) On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et C symétrique positive telles que $A + B = {}^t P(I_n + C)P$.
- 3) En déduire que si A est définie positive,

$$\det A + \det B \leq \det(A + B).$$

- 4) Montrer que cette inégalité est encore vraie sans cette hypothèse supplémentaire faite sur A .