

FEUILLE D'EXERCICES n° 10

Décomposition de Cholesky, moindres carrés

Exercice 1 – Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 1) Montrer que S_n est symétrique définie positive.
- 2) Déterminer la décomposition de Cholesky de S_n .
- 3) Déterminer la décomposition LU de S_n .

Exercice 2 – Soit $n \geq 2$ un entier. On considère la matrice

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- 1) Montrer que S_n est symétrique définie positive.
- 2) Déterminer la décomposition de Cholesky de S_n .
- 3) En déduire l'inverse de S_n .

Exercice 3 – On considère le système (S) : $AX = B$ où $X \in \mathbb{R}^3$ et où $A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^4$ sont définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que A est de rang 3 et que (S) n'a pas de solution.
- 2) On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $X_0 \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\|AX_0 - B\| = \inf_{X \in \mathbb{R}^3} \|AX - B\|.$$