Université Bordeaux 1
Mathématiques

Licence 3 - Algorithmique algébrique 2
Année 2012–2013

Devoir Surveillé, 18 octobre 2011
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre $AX = B$.
2) Déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.
3) Calculer le déterminant de A.

Exercice 2 – On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||.||_2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que ${}^tA + A$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que toute solution de l'équation $Y' = AY$ est de norme constante si et seulement si ${}^tA + A = 0$.

Exercice 3 – Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère la norme $||.|| = ||.||_2$ sur $M_n(K)$ induite par la norme $||.||_2$ de K^n. On note Cond le conditionnement correspondant. Soient A une matrice diagonalisable de $M_n(K)$ et E une matrice de $M_n(K)$. Soit μ une valeur propre de $A + E$.
1) Soit $M \in M_n(K)$. Rappeler pourquoi si $\rho(M) < 1$, alors $I + M$ est inversible.
2) On suppose que $\mu \notin \mathrm{Spec}(A)$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

a) Après avoir montré que $D - \mu I$ est inversible, vérifier l'égalité

$$P^{-1}(A + E - \mu I)P = (D - \mu I)\left(I + (D - \mu I)^{-1}P^{-1}EP\right).$$

b) Montrer que

$$||(D - \mu I)^{-1}P^{-1}EP|| \geqslant 1.$$

c) Montrer que

$$\min_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda - \mu| \leqslant \mathrm{Cond}(P)||E||.$$

d) Cette inégalité reste-t-elle vraie si $\mu \in \mathrm{Spec}(A)$?

3) Montrer que si A est symétrique réelle, alors

$$\min_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda - \mu| \leqslant ||E||.$$