	ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015 **Examen première session** **PARCOURS : LIMA 5032 Code UE : N1MA5032** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 15/12/2014 Heure : 8h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Notations. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}^1_{n,sup}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Exercice 1

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$. On décompose $A = D + L + U$, où D est diagonale, L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure et où les coefficients diagonaux de L et de U sont nuls. On rappelle que les matrices d'itération pour la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont respectivement égales à $J = -D^{-1}(L+U)$ et $G = -(D+L)^{-1}U$.

1. Calculer le rayon spectral des matrices J et G en fonction de a et b.

2. Imaginons qu'on veuille appliquer une méthode itérative à la résolution d'un système $AX = B$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la méthode de Jacobi converge pour tout vecteur initial. Même question pour la méthode de Gauss Seidel.

Exercice 2

Rappel. *Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $< \cdot, \cdot >$. Soient $(b_i)_{i\in[[1,n]]}$ une base de E et $(b_i)^*_{i\in[[1,n]]}$ l'orthogonalisée de Gram Schmidt de la base (b_i) telle que les coefficients diagonaux de la matrice de passage de (b_i) à $(b_i)^*$ sont égaux à 1. Alors pour tout $j \in [[1,n]]$,*

$$b_j^* = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{< b_j, b_i^* >}{< b_i^*, b_i^* >} b_i^*.$$

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à 3. Pour P et Q dans E, on note

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer la matrice de Gram M de la base $(1, x, x^2, x^3)$ pour $< \cdot, \cdot >$.

3. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale (P_0, P_1, P_2, P_3) pour $< \cdot, \cdot >$ de E telle que pour tout $i \in [[0,3]]$, le polynôme P_i est unitaire de degré i. Calculer les polynômes P_i.

4. Calculer la matrice de Gram de (P_0, P_1, P_2, P_3) pour $< \cdot, \cdot >$.

5. Calculer la matrice de passage de la base $(P_i)_{i\in[[0,3]]}$ à la base $(x^i)_{i\in[[0,3]]}$ (c'est-à-dire la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des x^i exprimés dans la base (P_i)).

6. Écrire M sous la forme

$$M = {}^tUDU$$

où D est diagonale et où $U \in \mathcal{T}^1_{4,sup}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Soient n nombres réels α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. On définit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer $U \in \mathcal{T}^1_{n,sup}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = {}^tUDU$.

b) En déduire que que M est définie positive si et seulement si $\det M > 0$.

c) Calculer l'inverse de M dans le cas où $\alpha = n$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = -1$.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Rappeler pourquoi si A est définie positive, alors $\det A > 0$. Donner un exemple où A n'est pas positive et où $\det A > 0$.

3. Pour $k \in [[1, n]]$, on note A_k la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i, j) est égal à $a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [[1, k]]^2$. Autrement dit, A_k est la sous-matrice carrée de taille k de A située en haut à gauche de cette matrice.

Montrer que si A est définie positive, alors $\det A_k > 0$ pour tout $k \in [[1, n]]$.

4. On suppose que A_{n-1} est définie positive. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où $0_{1,n-1}$ et $0_{n-1,1}$ sont le vecteur ligne nul et le vecteur colonne nul de taille $n-1$ et où I_{n-1} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

5. Montrer que si $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors A est définie positive (on pourra procéder par récurrence en utilisant les questions 4 et 1.*b*)).

Exercice 4

Dans cet exercice, on dit qu'une matrice est *positive* **si tous ses coefficients sont positifs ou nuls.**

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(M) < 1$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ est convergente. Montrer que $I - M$ est inversible d'inverse

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k.$$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie les propriétés suivantes.

(i) $a_{ii} > 0$ pour tout i et $a_{ij} \leq 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

(ii) Il existe une matrice diagonale positive $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = D^{-1}AD$ soit à diagonale strictement dominante.

Soit $\Delta = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$. On définit $C = I - \Delta^{-1}B$ et on note c_{ij} le coefficient (i, j) de C.

2. Pourquoi les matrices B et A sont elles inversibles ?

3. Montrer que $c_{ii} = 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$.

4. Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ tel que $i \neq j$, exprimer c_{ij} en fonction de a_{ij}, a_{ii}, d_i et d_j.

5. Montrer que $|||C|||_\infty < 1$. En déduire que $\rho(C) < 1$.

6. Montrer que $B^{-1} = (I - C)^{-1}\Delta^{-1}$ et que cette matrice est positive.

7. En déduire que A^{-1} est positive.