ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013 /2014
Première Session d'automne

PARCOURS : LIMA503 UE : N1MA5032
Épreuve : Algorithmique algébrique 2
Date : 16 décembre 2013
Heure : 14 Heures *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : A. Jehanne
Documents interdits

Exercice 1 – [PSEUDO-INVERSE]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Décomposer A en valeurs singulières, puis calculer la pseudo-inverse $A^\dagger$ de A.

2) Soit $\pi\ : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$. Quelle est la matrice de π dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

3) Soit $B = {}^t(1,1,2)$. Déterminer $X_0 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX_0 - B||_2$ soit minimale.

Exercice 2 – [POLYNÔMES ORTHOGONAUX]
Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, on pose

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1-x^2)dx.$$

1) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto < P, Q >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Q_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^{n+1}\right).$$

Montrer que Q_n est un polynôme de degré n et calculer son coefficient dominant d_n.

3) Soit (P_n) la suite de polynômes orthogonaux associée à $< .,. >$. Montrer que pour tout n,

$$P_n = \frac{1}{d_n} Q_n.$$

4) On rappelle que si f et g sont deux fonctions réelles n fois dérivables, la dérivée n-ème de fg est donnée par l'expression

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Pour tout n, on pose $S_n = (1-x^2)Q_n$. En utilisant l'égalité $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left((1-x^2)^{n+2}\right) = \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left((1-x^2)(1-x^2)^{n+1}\right)$, montrer que

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left((1-x^2)^{n+2}\right) = (1-x^2)S_n''(x) - 2(n+2)xS_n'(x) - (n+2)(n+1)S_n(x).$$

En utilisant l'égalité $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left((1-x^2)^{n+2}\right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\frac{d}{dx}(1-x^2)^{n+2}\right)$, montrer que

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left((1-x^2)^{n+2}\right) = -2(n+2)\left(xS_n'(x) + (n+1)S_n(x)\right).$$

5) En déduire que pour tout n, le polynôme P_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 4xy' + n(n+3)y = 0.$$

Exercice 3 – [DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY]
Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $A = {}^tRR$ sa décomposition de Cholesky. On note $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $R = (r_{ij})_{i,j}$.

1) Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer a_{ii} en fonction des coefficients r_{kl} de R.

2) Montrer que

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si A est diagonale.

Exercice 4 – [NORME, CONDITIONNEMENT]
Soit $||.||$ une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. On note également $||.||$ la norme qu'elle induit sur $\mathscr{M}_n(K)$.

1) Soit $F \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $||F|| < 1$. Montrer que $I+F$ est inversible.

2) On note $E = (I+F)^{-1}$. Montrer que

$$||E||(1-||F||) \leqslant 1.$$

En déduire que

$$||(I+F)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-||F||}.$$

3) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Soit $F \in \mathbb{M}_n(K)$ telle que $||F|| < 1$. On note $A' = A(I+F)$. Soient B et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ tels que $AX = B$. Soit enfin $\Delta X \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ tel que $A'(X+\Delta X) = B$.

a) Montrer que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leqslant ||A'^{-1}(A-A')||.$$

En déduire que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leqslant \frac{||F||}{1-||F||}.$$

b) Montrer que

$$||F|| \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{||A'-A||}{||A||}.$$

En déduire que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leqslant \frac{\mathrm{Cond}(A)}{1-\mathrm{Cond}(A)\frac{||A'-A||}{||A||}}\frac{||A'-A||}{||A||}.$$

FIN