ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011 /2012
Première Session d'automne

PARCOURS : LIMA503 UE : N1MA5032
Épreuve : Algorithmique algébrique 2
Date : 18 décembre 2012
Heure : 14 Heures *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : A. Jehanne
Documents interdits

Exercice 1 – [EXPONENTIELLE DE MATRICE]

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que le polynôme minimal de A est égal à $m(x) = (x-a)^2$, où a est un nombre complexe quelconque. Pour tout nombre réel t, montrer que $\exp(At) = e^{at}\left((1-at)I_n + At\right)$.

2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A-3I_4)^2$, puis résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec la condition initiale : $Y(0) = {}^t(2,-1,1,-1)$.

Exercice 2 – [PSEUDO-INVERSE]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Décomposer A en valeurs singulières, puis calculer la pseudo-inverse $A^\dagger$ de A.

2) Soit $B = {}^t(1,1,1)$. Déterminer $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $||AX_0 - B||_2$ soit minimale. Calculer alors $||AX_0 - B||_2$.

Exercice 3 – [POLYNÔMES ORTHOGONAUX]

Soient $]a,b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et ω une fonction continue non nulle de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_a^b \omega(t)t^k dt$ converge. Soit alors

$$< P, Q >= \int_a^b \omega(t)P(t)Q(t)dt$$

le produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$ défini par ω. On note $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux associée à ce produit scalaire.

Soit n un entier naturel non nul, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P_n. On note A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i,j) est égal à $P_{i-1}(x_j)$ pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} P_0(x_1) & \ldots & P_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(x_1) & \ldots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}$$

1) On souhaite montrer que A est inversible. Pour cela, on raisonne par l'absurde : supposons donc que A n'est pas inversible.

a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $C = {}^t(c_1,\ldots,c_n)$ de taille n tel que ${}^tAC = 0$.

b) Soit alors

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x).$$

Montrer que $Q = 0$, expliquer pourquoi ce résultat est absurde, et conclure que A est inversible.

2) Soit $B = {}^t(< P_0, P_0 >, 0, \ldots, 0)$. On note $W = {}^t(w_1, \ldots, w_n)$ l'unique solution de l'équation $AX = B$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n-1$). Soit R le reste de la division euclidienne de P par P_n. Montrer qu'il existe un unique élément $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} r_i P_i.$$

b) Montrer que

$$\int_a^b w(t)P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i P(x_i)$$

(on pourra pour cela démontrer que chacun des deux membres de cette égalité est égal au réel $r_0 < P_0, P_0 >$).

Exercice 4 – [MATRICES SYMÉTRIQUES, NORME, CONDITIONNEMENT]

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||.|| = ||.||_2$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite par $||.||$, encore notée $||.||$. Le conditionnement relatif à cette norme est noté cond. Soit A une matrice symétrique définie positive. On rappelle qu'il existe une matrice $R = (r_{ij})$ triangulaire supérieure aux éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tRR$.

1) Montrer que $||A|| = ||R||^2$ et que $||A^{-1}|| = ||R^{-1}||^2$.

2) Montrer que $||A|| \geqslant r_{ii}^2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Montrer que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{||M^{-1}||} = \min_{x \neq 0} \frac{||Mx||}{||x||}.$$

4) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$r_{ii}^2 \geqslant \min_{x \neq 0} \frac{{}^tx{}^tRRx}{{}^txx} = \frac{1}{||R^{-1}||^2}$$

(pour démontrer l'inégalité, on pourra commencer par écrire $R = DU$, où $D = \mathrm{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn})$, et où U est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1).

5) Déduire de tout cela que

$$\mathrm{cond}(A) \geqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\frac{r_{i,i}}{r_{j,j}} \right)^2.$$

FIN