ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011 /2012
Première Session d'automne

PARCOURS : LIMA503 UE : N1MA5032
Épreuve : Algorithmique algébrique 2
Date : 13 décembre 2011
Heure : 14 Heures *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : A. Jehanne
Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 – [DÉCOMPOSITION LU]
Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1\\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}).$$

On note $E_n={}^t(0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^n$. Déterminer la décomposition LU de A, résoudre le système $AX=E_n$ et calculer $\det A$.

Exercice 2 – [PSEUDO-INVERSE]
Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

1) Décomposer A en valeurs singulières, puis calculer la pseudo-inverse $A^\dagger$ de A.
2) Soit $B={}^t(1,0,1)$. Déterminer $X_0\in\mathbb{R}^2$ tel que $||AX_0-B||_2$ soit minimale.

Exercice 3 – [CONDITIONNEMENT]
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||.||=||.||_2$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite par $||.||$, encore notée $||.||$. Le conditionnement relatif à cette norme est noté cond. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ considérés ici sont tous des vecteurs colonnes.

Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$ et soit $A=UD{}^tV$ une décomposition en valeurs singulières de A, où $D=\mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ est telle que

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\dots\geqslant\mu_n>0.$$

1) Exprimer $||A||$, $||A^{-1}||$ et $\mathrm{cond}(A)$ en fonction des μ_i.
2) Un vecteur $B\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ étant donné, soit X une solution du système $AX=B$. On suppose que B est perturbé par $\Delta B\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Soit alors $\Delta X\in\mathbb{R}^n$ tel que $A(X+\Delta X)=B+\Delta B$, c'est-à-dire : $A\Delta X=\Delta B$. Comme on l'a vu en cours, les inégalités $||\Delta X||\leqslant||A^{-1}||.||\Delta B||$ et $||B||\leqslant||A||.||X||$ donnent

$$\frac{||\Delta X||}{||X||}\leqslant\mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta B||}{||B||}.$$

Déterminer en fonction de U des vecteurs non nuls B et ΔB tels que $||B||=||A||.||X||$ et $||\Delta X||=||A^{-1}||.||\Delta B||$, et vérifier qu'alors

$$\frac{||\Delta X||}{||X||}=\mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta B||}{||B||}.$$

3) Déterminer en fonction de U un vecteur non nul $B\in\mathbb{R}^n$ tel que pour tout ΔB dans $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{||\Delta X||}{||X||}\leqslant\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

(on pourra pour cela chercher B tel que $||A^{-1}||.||B||=||X||$).

T.S.V.P.

Exercice 4 – [POLYNÔMES ORTHOGONAUX]

Soient α et β deux éléments de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tels que $\alpha<\beta$. On pose $I=]\alpha,\beta[$. Soient $a\in\mathbb{R}_2[x]$ et $b\in\mathbb{R}_1[x]$ deux polynômes que l'on écrit $a(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ et $b(x)=b_1x+b_0$ où a_0,a_1,a_2,b_0 et b_1 sont des réels. On suppose que $a(x)>0$ pour tout x dans I et que $a_2k+b_1\neq 0$ pour tout entier naturel k. On considère l'application φ de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$ définie par

$$\varphi(P)=aP''+bP'.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$, qui pour tout entier naturel n induit un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[x]$ (en posant $\varphi_n(P)=\varphi(P)$).

2) Soit A une primitive de $(b-a')/a$, et soit ω la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\omega(x)=e^{A(x)}$. Montrer que ω est dérivable et prend ses valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^*$.

3) Montrer que pour tout P dans $\mathbb{R}[x]$,

$$\varphi(P)=\frac{1}{\omega}(a\omega P')'.$$

4) On suppose que pour tout entier naturel n, l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \omega(t)t^n dt \quad \text{converge.}$$

On peut alors définir l'application de $\mathbb{R}[x]^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (P,Q) associe

$$<P,Q>=\int_\alpha^\beta \omega(t)P(t)Q(t)dt$$

et on sait que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. On suppose aussi que

$$\lim_{x\to\alpha} a\omega(x)=\lim_{x\to\beta} a\omega(x)=0.$$

Montrer que pour tout (P,Q) de $\mathbb{R}[x]^2$,

$$<\varphi(P),Q>=<P,\varphi(Q)>.$$

5) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[x]$ muni du produit scalaire $<.,.>$. Montrer que pour tout entier naturel n, l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[x]$ est diagonalisable dans une base orthogonale $(B_0,\dots,B_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que pour tout i dans $\{0,\dots,n\}$, le degré de B_i est égal à i.

6) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux unitaires associée à ω. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel non nul c_n tel que $P_n=c_nB_n$.

7) À titre d'exemple, considérons la fonction ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{-x^2/2}$. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux unitaires associée à ω (ce sont les polynômes d'Hermite). Montrer que pour tout entier naturel n, le polynôme H_n est solution de l'équation différentielle

$$y''-xy'+ny=0.$$

8) On pose

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^n h_kx^k, \quad \text{où} \quad h_n=1.$$

Pour tout entier k de $[0,n-2]$, exprimer h_k en fonction de h_{k+2}. Soit k un entier de $[0,n]$. Montrer que Si k est impair, $h_{n-k}=0$ et que si k est pair,

$$h_{n-k}=\frac{(-1)^{k/2}}{2^{k/2}}\frac{n!}{(n-k)!(k/2)!}.$$

FIN