Mathématiques pour l'Informatique

2025

En cours de rédaction

Contents

1 Introduction

Pour les études en informatiques, les mathématiques sont indispensables. Ce cours s'attache à des notions nécessaires pour les informaticiens.

Vous aurez besoin de comprendre comment fonctionnent les algorithmes que vous rencontrerez, prouver qu'ils se terminent et qu'ils font bien ce que vous attendez d'eux. Pour certains algorithmes, c'est assez simple, mais cela peut devenir compliqué et il est nécessaire d'être à l'aise avec les bases de logique mathématiques pour ce travail. C'est bien sûr également nécessaire pour construire vos propres algorithmes. Les différents types de raisonnement sont cruciaux.

Il est également important de comprendre et différencier les objets mathématiques comme les ensembles, leurs éléments, les produits cartésiens, les suites finies (listes) ou infinies, etc.

En informatique, il faut savoir évaluer le nombre d'opérations nécessaires à l'exécution d'un algorithme. Cela demande de savoir manipuler des suites, des sommes, des raisonnements par récurrence. Il est aussi important de pouvoir interpréter le résultat : est-ce que le temps de calcul sera trop long ? Comment situer l'efficacité de l'algorithme par rapport à un autre qui donnerait le même résultat ? C'est pourquoi il est nécessaire de pouvoir comparer certaines fonctions entre elles.

Une partie du programme porte sur des notions déjà vues en mathématiques générales (cours suivi par chacun d'entre vous), et en mathématiques approfondies (suivi par certains d'entre vous). L'expérience des année précédentes montre que ces cours ne suffisent pas. C'est pourquoi nous y revenons dans ce cours de "mathématiques pour l'informatique", en insistant davantage sur les exercices.

Au fur et à mesure du cours, le polycopié sera mis à votre disposition sur moodle. Lors des séances du cours magistral, le polycopié sera utilisé comme support. Il sera projeté, et complété par des explications orales et écrites au tableau.

Il vous faudra toutefois prendre des notes. Il ne s'agira pas de recopier le polycopié, mais d'ajouter les explications supplémentaires. Pour cela, je suggère de noter sur votre cahier de cours chaque numéro et titre de paragraphe au fur et à mesure du cours et d'y écrire ce qui est ajouté.

Par exemple, si des remarques sont ajoutées sur le théorème "truc", vous pouvez écrire :
"Théorème truc - " et ajouter les commentaires.

Ou bien, pour l'exercice "machin", qui serait fait en cours, vous pouvez écrire :
"Exercice machin" - " et ajouter les commentaires.

Ainsi, vous pourrez étudier le cours avec le polycopié et vos notes.

Pour raisonner bien, il est nécessaire de bien organiser ses idées. Pour cela, il est utile de rédiger rigoureusement. Comme le raisonnement est l'un des objectifs principaux de ce cours, la rédaction sera prise en compte lors des évaluations.

Pour rédiger correctement lors des évaluations, il faut bien sûr s'entraîner à le faire auparavant. C'est-à-dire qu'il vous faudra faire un effort sur ce point durant les séances de travaux dirigés et votre travail personnel.

2 Logique

Les thèmes suivants ont déjà été vus dans le cours de mathématiques générales au semestre 1.

- Tables de vérité
- Quantificateurs
- Raisonnement par contraposée
- Raisonnement par l'absurde
- Raisonnements par récurrence

Dans ce paragraphe, on s'appuie sur ce qui a été vu dans ce cours pour divers exercices sur les raisonnements.

On commence par quelques rappels.

2.1 Propositions logiques

Nous exprimons nos raisonnements et énonçons nos résultats, transmettons nos connaissances à l'aide d'énoncés. Les **propositions logiques** sont les objets mathématiques qui formalisent ces énoncés.

Définition 2.1.1 *Une* **proposition logique** *(ou* **proposition** *est un énoncé auquel on peut associer une valeur de vérité : soit vrai soit faux.*

Une proposition logique peut dépendre d'un paramètre (on parle alors de proposition à paramètre). Dans ce cas, la valeur de vérité associée dépend de la valeur du paramètre.

Exercice 2.1.2 *Parmi les énoncés suivants, lesquels sont des propositions logiques ?*

1. 4 *plus* 5 *font* 9.
2. 1 *est plus grand que* 2.
3. *Le présent énoncé est faux.*
4. *La* $300^{ème}$ *décimal de* π *est un* 7.
5. *La fonction* $\sin\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est périodique.*

6. $x \geq 0$.

Remarques 2.1.3 *1. L'énoncé "1 est plus grand que 2" peut sembler étrange, mais c'est bien une proposition logique : c'est une proposition logique fausse.*

2. L'énoncé "$x \geq 0$" est une proposition logique à paramètre. Sa valeur de vérité dépendra de la valeur de x (dans cette proposition, on sous-entend que $x \in \mathbb{R}$ et donc peut être comparé à 0).

2.2 Opérations logiques

On définit des opérations entre les propositions logiques (aussi appelées variables propositionnelles). Ces opérations sont appelées connecteurs logiques. Ils permettent de créer d'autre propositions logiques (appelées formules propositionnelles).

Ces connecteurs sont les suivants.

1. La négation "non", qui peut aussi être notée $\neg$
2. La disjonction logique "ou", qui peut aussi être notée $\vee$
3. La conjonction logique "et", qui peut aussi être notée $\wedge$
4. L'implication, notée $\Longrightarrow$
5. L'équivalence, notée $\Longleftrightarrow$

Pour simplifier, nous noterons "non" (plutôt que $\neg$), "ou" (plutôt que $\vee$), "et" (plutôt que $\wedge$).

La valeur de vérité d'une proposition logique obtenue à l'aide de connecteurs dépend des valeurs de vérité des propositions logiques en jeu. On peut décrire ces valeurs de vérité à partir de la table de vérité de la proposition logique.

Exercice 2.2.1 *Remplir les tables de vérité suivante sans regarder votre cours de mathématiques générales.*

p	*non* p
F	
V	

p	q	p *ou* q
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

p	q	p *et* q
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Exercice 2.2.2 *Soient p la proposition $1+1=3$ et q la proposition "10 est un nombre entier". Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.*

1. *p ou q*
2. *(non p) ou q*
3. *(non p) et q*
4. *p et q*
5. *(non p) ou (non q)*
6. *$p \implies q$*
7. *(non p) $\implies q$*
8. *(non p) $\implies$ (non q)*

Remarques 2.2.3 *1. Dans le langage courant, "ou" a en général un sens exclusif (fromage "ou" dessert). En mathématiques, le "ou" est toujours "inclusif" : si p et q sont toutes les deux vraies, p ou q est vraie.*

2. *Dire que "$p \Rightarrow q$ est vrai" ne signifie pas que p est vraie mais seulement que si l'hypothèse p est vraie, alors la conclusion q l'est aussi.*
3. *Noter en particulier que, si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vrai... C'est pour cela que pour démontrer qu'une implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on fait l'hypothèse que p est vraie et on montre que q est alors vraie (puisque si p est fausse il n'y a rien à démontrer).*
4. *Lorsqu'une implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on l'utilise ensuite dans des raisonnements :*
   p est vraie et $p \Rightarrow q$ est vraie donc q est vraie.

Attention: Un abus courant consiste à confondre une *formule propositionnelle* et sa *valeur de vérité*. Ainsi, dans un texte mathématique,

$\boxed{\text{on écrira souvent "}p \Rightarrow q\text{" pour dire que "}p \Rightarrow q\text{ est vraie"}}$.

Avec cet abus de notation la formule "$p \Rightarrow q$" se dit aussi parfois "si p, alors q", ou bien "p implique q", ou bien "pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie", ou encore

- “une **condition suffisante** pour q est p”,
- “une **condition nécessaire** pour p est q”.

La formule ”$p \iff q$” se dit parfois ”p est équivalente à q”, ou encore ”p si et seulement si q”, ou encore ”p est une condition nécessaire et suffisante pour q”, ou encore ”q est une condition nécessaire et suffisante pour p”.

Exemples 2.2.4 *1. Soit ABC un triangle. Quand on dit*

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff AB^2 + AC^2 = BC^2$$

on sous-entend que cette proposition logique est vraie.

2. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de même direction. Si on dit

$$(\mathcal{D} = \mathcal{D}') \text{ ou } (\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset)$$

on sous-entend que cette proposition logique est vraie.

Définition 2.2.5 *On dit que deux formules propositionnelles F et G sont* équivalentes *si elles ont même table de vérité. On peut le noter $F \equiv G$.*

Exercice 2.2.6 *Montrer que la formule $p \Rightarrow q$ peut s'exprimer à l'aide des symboles de conjonction et de disjonction par l'une ou l'autre des phrases suivantes:*

- *(non p) ou q*
- *non (p et (non q)).*

Exercice 2.2.7 *Compléter les exemples importants de formules équivalentes ci-dessous. Ces résultats sont à connaître.*

- *non (p et q) est équivalent à ((non p) $\ldots$ (non q)).*
- *non (p ou q) est équivalent à ((non p) $\ldots$ (non q)).*
- *$(p \Leftrightarrow q)$ est équivalent à $((p \Rightarrow q) \ldots (q \Rightarrow p))$.*
- *$(p \Rightarrow q)$ est équivalent à ((non q) $\ldots$ (non p)) (contraposée)*
- *$(p \Rightarrow q)$ est équivalent à ((non p) $\ldots$ q)*
- *p ou q est équivalent à ((non p) $\ldots$ q)*
- *non $(p \Rightarrow q)$ est équivalent à ($p \ldots$ (non q))*

Proposition 2.2.8 (associativité et distributivité des connecteurs logiques)

- *p et (q et r) est équivalent à (p et q) et r.*
- *p ou (q ou r) est équivalent à (p ou q) ou r.*

- *p et $(q$ ou $r))$ est équivalent à $(p$ et $q)$ ou $(p$ et $r)$*
- *p ou $(q$ et $r)$ est équivalent à $(p$ ou $q)$ et $(p$ ou $r)$*

Exercice 2.2.9 *Démontrer la proposition précédente.*

Exercice 2.2.10 *Démontrer que le connecteur logique " $\iff$ " est associatif. On pourra pour cela utiliser une table de vérité.*

p	q	r	$p \iff q$	$q \iff r$	$(p \iff q) \iff r$	$p \iff (q \iff r)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
F	V	V				
V	F	F				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Exercice 2.2.11 *Montrer que le connecteur logique " $\Longrightarrow$ " n'est pas associatif.*

Exercice 2.2.12 *Soient p, q et r trois propositions. Exprimer la négation des propriétrés suivantes.*

1. $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$
2. $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r$
3. *non* $p \Longrightarrow q$
4. $(p$ *et* $q)$ *ou* r

Exercice 2.2.13 *Soit x un nombre réel.*

1. *Compléter le tableau des signes suivant.*

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad +\infty$
$x-\sqrt{3}$	
$x+\sqrt{3}$	
x^2-3	

2. *Compléter*

$$x^2 - 3 \geq 0 \iff (x \cdots - \sqrt{3}) \ldots (x \ldots \sqrt{3})$$

Remarque 2.2.14 *On a défini plus haut l'équivalence des formes propositionnelles : deux formules propositionnelles F et G sont* équivalentes *si elles ont même table de vérité, ce qu'on a écrit $F \equiv G$.*

Cela sigifie aussi que F et G sont équivalentes *si et seulement si*

$$F \text{ est vraie } \iff G \text{ est vraie}$$

Exercice 2.2.15 *Soient F et G deux formules propositionnelles. Parmi les affirmations suivantes, indiquer lesquelles sont correctes.*

1. *Si $F \equiv G$, alors lorsque F est vraie, G est vraie et lorsque G est vraie, F est vraie.*
2. *On suppose que si F est vraie, G est vraie et lorsque G est vraie, F est vraie. Dans ce cas, $F \equiv G$.*
3. *On suppose que si F est vraie, G est vraie et lorsque G est fausse, F est fausse. Dans ce cas, $F \equiv G$.*
4. *On suppose que si F est fausse, G est fausse et lorsque G est fausse, F est fausse. Dans ce cas, $F \equiv G$.*

2.3 Méthodes

Implication Pour démontrer qu'une implication

$$p \implies q$$

est vraie, il faut supposer que p est vraie, et à l'aide de cette hypothèse, déduire q par des opérations logiques.

Il faut rédiger comme suit.

Écrire que l'on suppose l'hypothèse p vraie.
$\vdots$
suite d'arguments logiques qui permettent de conclure que q est vraie.
$\vdots$
Donc q.

Exemple 2.3.1 *Avant d'aborder l'exemple, on rappelle que si r est un réel positif et x un réel,*

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$$

On veut démontrer que si x est un réel tel que $|x-2| \leq 1$ et $|x| \leq 1$, alors $x = 1$.

Ici, l'hypothèse (qui dépend du réel x) est :

$$p(x) \ : \ |x-2| \leq 1 \text{ et } |x| \leq 1$$

On écrit alors : soit x un réel. On suppose que $|x-2| \leq 1$ et $|x| \leq 1$. On traduit ensuite les hypothèse :

1. *comme $|x-2| \leq 1$, c'est que $-1 \leq x-2 \leq 1$ et donc en ajoutant 2 dans ces inégalités $1 \leq x \leq 3$.*

2. *comme $|x| \leq 1$, c'est que $-1 \leq x \leq 1$.*

On a donc obtenu : $x \geq 1$ (par le 1) et $x \leq 1$ (par le 2), donc $x = 1$.

Exercice 2.3.2 *Montrer que si x est un réel tel que $|x-3| \leq 2$, alors $x > 0$.*

Exercice 2.3.3 *Dans le plan euclidien, on rappelle que si A et B sont deux points distincts, la médiatrice d'un segment $[A, B]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B (c'est en fait la droite orthogonale à (AB) qui passe par le milieu de $[A, B]$).*

Soit (A, B, C) un triangle non plat. Soit I un point des médiatrices de $[A, B]$ et de $[A, C]$. Montrer que I appartient à la médiatrice de $[B, C]$.
Remarque. Cela montre que les médiatrices d'un triangle non plat sont concourantes.

Disjonction On appelle disjonction entre deux propositions p et q la proposition p ou q. On rappelle que p ou q est équivalente à non $p \implies q$.

Pour démontrer p ou q, on démontre souvent (non p) $\implies q$.

Exercice 2.3.4 *Soient a et b deux réels tels que $a + b \geq 1$. En utilisant la méthode indiquée ci-dessus, montrer que $a \geq \frac{1}{2}$ ou $b \geq \frac{1}{2}$.*

2.4 Quantificateurs

Les expressions "pour tout" (ou "quelque soit") et "il existe" sont omniprésents dans les énoncés mathématiques.

En effet, on est amené à manipuler des propositions dépendant d'une variable parcourant un ensemble (on rappelle ci-dessous la définition d'un ensemble).

Définition 2.4.1 *Un ensemble E est une collection d'objets deux à deux distincts appelés éléments de E, donnés dans un ordre indifférent.*

On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E. C'est dans ce contexte que l'on introduit les quantificateurs " $\forall$ " et " $\exists$ ".

Définition 2.4.2

1. *Le symbole $\forall$ signifie "quelque soit" (ou "pour tout"). On l'appelle le quantificateur universel.*
2. *Le symbole $\exists$ signifie "il existe". On l'appelle le quantificateur existentiel.*

Soit $p(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E.

1. La proposition
$$\forall x \in E,\ p(x)$$
est vraie si $p(x)$ est vraie pour chaque élément x de E.

2. La proposition
$$\exists x \in E,\ p(x)$$
est vraie s'il existe au moins un élément x de E pour lequel $p(x)$ est vraie.

Exercice 2.4.3 *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Dans chacun des items suivants, indiquer si les deux propositions ont la même signification ou non.*

1. *"$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 0$" et "$\forall y \in \mathbb{R}\ ,\ f(y) = 0$".*
2. *"$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 0$" et "$\exists x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 0$".*
3. *"les éléments de E sont tous non nuls" et "les élément de E sont non tous nuls".*

Exercice 2.4.4 *On considère la proposition suivante, où le quantificateur a été effacé.*
$$\ldots x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 - 3 \geq 0$$

1. *Compléter cet énoncé à l'aide d'un quantificateur pour obtenir une proposition logique fausse.*
2. *Même question, mais pour obtenir une proposition logique vraie.*

Exercice 2.4.5 *Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Compléter la proposition suivante afin d'exprimer que x est impair.*
$$\ldots k \in \mathbb{Z}\ ,\ x = 2k + 1$$

Exercice 2.4.6 *Soit x un entier. Montrer que x est pair ou $x + 1$ est pair.*

Exercice 2.4.7 *Soit x un entier relatif.*
Soit $p(x)$ la proposition : "x est impair".
Soit $q(x)$ la proposition : "$x^2 - 1$ est divisible par 8".

1. *Soit k un entier relatif.*
   (a) *Montrer que $k(k + 1)$ est divisible par 2.*
   (b) *Montrer que $(2k + 1)^2 = 1 + 4k(k + 1)$ et que $4k(k + 1)$ est divisible par 8.*
2. *En déduire que $p(x) \implies q(x)$.*
3. *En utisant un quantificateur, compléter la phrase suivante pour exprimer le résultat démontré.*
$$\ldots\ldots\ldots\ (x \text{ est impair }) \implies (8 \text{ divise } x^2 - 1)$$

Remarques 2.4.8 *1. Les variables sont muettes :* $\forall x,\ p(x)$ *et* $\forall y,\ p(y)$ *désignent la même proposition.*

2. *La négation de* $(\forall x \in E,\ p(x))$ *est* $(\exists x \in E,\ \text{non } (p(x)))$.

3. *La négation de* $(\exists x \in E,\ p(x))$ *est* $(\forall x \in E,\ \text{non } (p(x)))$.

4. *Pour montrer que* "$\exists x \in E, p(x)$" *est vraie, il suffit de trouver un* x *particulier dans l'ensemble* E *pour lequel* $p(x)$ *est vraie. Pour montrer que* "$\forall x \in E, p(x)$" *est vraie,* un tel exemple ne suffit pas.

   Montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" *est faux revient à montrer que* "$\exists x \in E, \text{non } p(x)$" *est vraie, donc il suffit de trouver un* **contre-exemple***, c'est-à-dire un* x *pour lequel* $p(x)$ *est faux.*

5. *En général,* $(\forall x \in E, \exists y \in E, p(x,y))$ *et* $(\exists y \in E, \forall x \in E, p(x,y))$ *sont deux propositions différentes.*

Exercice 2.4.9 *Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.*

1. $(\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y \geq 0)$
2. $(\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, x + y \geq 0)$

Exercice 2.4.10 *1. Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *En utilisant des quantificateurs, exprimer la condition pour que* f *soit paire.*

2. *De même, exprimer la condition pour que* f *soit impaire.*

3. *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* x *associe* $f(x) = x^2+x-1$. *Calculer* $f(1)$ *et* $f(-1)$. *La fonction* f *est-elle paire ? Est-elle impaire ?*

2.5 Raisonnement par contraposée

Principe : Soient p et q deux propositions. Supposons que l'on veuille prouver que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie. Le principe de **contraposition** assure qu'il est équivalent de démontrer que la proposition (non q) $\Rightarrow$ (non p) est vraie.

La proposition (non q) $\Rightarrow$ (non p) est appelée la **contraposée** de $p \Rightarrow q$.

Attention : Ne pas confondre la contraposée de $p \Rightarrow q$, qui est non $q \Rightarrow$ non p, avec sa **réciproque** "$q \Rightarrow p$". La contraposée est équivalente à la proposition de départ, ce n'est pas le cas de la réciproque.

Exercice 2.5.1 *Donner la contraposée de la phrase suivante. "S'il pleut, le sol est mouillé".*

Quelle est sa réciproque ?

Exercice 2.5.2 *Soit n un entier. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.*
Indication. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 2.4.7

Exercice 2.5.3 *Soit n un nombre entier. On va montrer que si n^2 est pair, alors n est pair en utilisant la contraposée. Compléter le raisonnement suivant. la contraposée de cette proposition est :*

Si n est ... , alors n^2 est ...

Démontrons cette proposition.
On suppose donc que n est impair. Alors

$$\dots k \in \mathbb{Z}\ ,\ n = 2k + 1$$

Donc

$$n^2 =$$

Conclure.

2.6 Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** est un principe de démonstration fondé sur le principe logique du **tiers exclu** qui affirme que p ou non (p) est toujours vrai.

Principe de la démonstration par l'absurde : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie. On suppose que non p est vraie (donc que p est fausse), et l'on exhibe une contradiction, en utilisant notre système d'axiomes et/ou les règles de déduction logique. On en conclut alors que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc que p est vraie.

Exemple : Montrons par l'absurde que $x^4 + 2x^2 + x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

On suppose que la propriété est fausse, c'est-à-dire que $x^4 + 2x^2 + x - \sqrt{2}$ admet (au moins une) racine entière. On note n_0 une telle racine. On a donc $n_0^4 + 2n_0^2 + n_0 - \sqrt{2} = 0$. Donc
$\sqrt{2} = n_0^4 + 2n_0^2 + n_0$. Mais n_0 est entier, donc $n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$ également. Donc $\sqrt{2}$ est entier, ce qui est impossible.

Par conséquent $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

Exercice 2.6.1 *Montrer qu'il n'existe pas de couples d'entiers (a, b) tels que $6a + 10b = 1$.*

Exercice 2.6.2 *On reprend l'exercice 2.3.4 :*
"soient a et b deux réels tels que $a + b \geq 1$, Montrer que $a \geq \dfrac{1}{2}$ ou $b \geq \dfrac{1}{2}$".

On a démontré ce résultat en utilisant le fait que p ou q est équivalent à non $p \implies q$.

Démontrer ce même résultat par un raisonnement par l'absurde.

Exercice 2.6.3 *On rappelle que les nombres rationnels x sont les nombres obtenus comme quotients de deux nombres entiers $x = \dfrac{a}{b}$ et que les nombres irrationnels sont les nombres qui ne sont pas rationnels.*

1. *Soit $x = \dfrac{15}{18}$. Simplifier l'écriture de x.*
2. *Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnel.*

La démonstration par l'absurde est très souvent utilisée pour montrer une non-existence, ou l'unicité de quelque chose.

2.7 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration qui s'applique lorsque l'on veut démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier (exemple : "montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - 1$ est un multiple de 9").

L'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* possède la propriété remarquable appelé le principe de récurrence. [1]. Cette propriété est à la base du raisonnement par récurrence, dont le principe est rappelé ci-dessous.

> Soit n_0 un entier, et $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier n, définie pour tout $n \geq n_0$. On fait les hypothèses suivantes :
>
> **(R1)** La propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
>
> **(R2)** Pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie.
>
> Alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Pour un raisonnement par récurrence, rédiger comme suit.

> **Initialisation.** On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
> **Hérédité.** Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. On veut montrer que $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie. On suppose donc que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
>
> $$\vdots$$
>
> suite de déductions logiques pour montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
>
> $$\vdots$$
>
> On déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
> On en déduit que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

[1] Cette propriété "ne va pas de soi", et elle est en fait l'un des axiomes utilisés pour la construction de $\mathbb{N}$. Cette construction axiomatique de $\mathbb{N}$ n'est pas au programme du cours.

Exercice 2.7.1 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - 1$ est un multiple de 9.*

Exercice 2.7.2 *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la somme des n premiers entiers non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2.7.3 *Soit (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n(n+1)$.*

2.8 Récurrence "à deux étages"

Cherchons à résoudre l'exercice suivant.

Exercice 2.8.1 *Soit (u_n) la suite définie par les données de $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1*

$$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 1 + 2^n$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = 1 + 2^n$.
Initialisation. Vérifions que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On calcule $1 + 2^0 = 2$. Comme $u_0 = 2$, on obtient bien : $u_0 = 1 + 2^0$. Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On veut montrer que $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie.
On suppose donc que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Donc $u_n = 2^n + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(2^n + 1) - 2u_{n-1} \end{aligned}$$

Mais que faire de u_{n-1} ? On a supposé que $u_n = 2^n + 1$, mais rien sur u_{n-1}. Par ailleurs, si $n = 0$, $n - 1 = -1$ et on n'a pas défini u_{-1}.

On aurait pu aussi vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, puis pour l'hérédité, écrire Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. Alors u_{n-1} sera bien défini, mais dans le calcul ci-dessus, nous aurons besoin de pouvoir remplacer u_{n-1} par $2^{n-1} + 1$. Nous avons donc besoin de savoir que

$$\mathcal{P}(n) \text{ est vraie et } \mathcal{P}(n-1) \text{ est vraie}$$

Notre démonstration par récurrence a échoué car nous avons eu besoin de la valeur de u_{n-1} en plus de celle de u_n.

Recommençons.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définissons la nouvelle proposition logique

$$\mathcal{Q}(n) = (\mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(n))$$

Initialisation. Vérifions que $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

$$\mathcal{Q}(1) = (\mathcal{P}(0) \text{ et } \mathcal{P}(1))$$

On calcule $1 + 2^0 = 2$. Comme $u_0 = 2$, on obtient bien : $u_0 = 1 + 2^0$. Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On calcule $1 + 2^1 = 3$. Comme $u_1 = 3$, on obtient bien : $u_1 = 1 + 2^1$. Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On conclut que $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. On veut montrer que $(\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1))$ est vraie.

On suppose donc que $(\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Cela veut dire que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies, donc

$$\begin{cases} u_{n-1} = 1 + 2^{n-1} \\ \quad u_n = 1 + 2^n \end{cases}$$

On reprend le calcul ébauché plus haut.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 6 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &= (6-2)2^{n-1} + 1 \\ &= 4 \cdot 2^{n-1} + 1 \\ &= 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

C'est donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. On a donc démontré que l'implication suivante est vraie.

$$(\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1))$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + 2^n$$

L'exemple précédent montre que parfois, il n'est pas possible de démontrer $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, mais par exemple

$$(\mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Alors dans l'initialisation, on doit vérifier que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies. Ensuite, dans l'hérédité, il suffit de démontrer que pour tout entier $n \geq n_0 + 1$,

$$(\mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

2.9 Récurrence forte

Plus généralement, il arrive que pour déduire $\mathcal{P}(n+1)$, on a besoin de savoir que $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour un certain nombre d'entiers k inférieurs à n, et que $\mathcal{P}(n)$ ne suffit pas, ou même que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ ne suffisent pas.

Dans ce cas, on peut utiliser le principe de récurrence à la nouvelle proposition

$$\mathcal{Q}(n) \;:\; \text{"}\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie".}$$

Exercice 2.9.1 *Soit (u_n) la suite telle que : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 4$ et telle que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}$.*

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - (-1)^n + 1$.

Pour tout entier naturel n, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n = 2^n-(-1)^n+1$" et $\mathcal{Q}(n)$ la proposition "$\forall k \in [[0,n]],\ \mathcal{P}(n)$ est vraie".

1. *Vérifier que si $n \in [[0,1,2]]$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.*
2. *Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$.*
3. *Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - (-1)^n + 1$.*

Exercice 2.9.2 *Reprendre l'exercice 2.8.1 en le rédigeant comme l'exercice 2.9.1.*

Remarque 2.9.3 *Lorsqu'on cherche à évaluer le nombre d'opérations $f(n)$ que nécessite un algorithme appliqué à des données de taille n (complexité de l'algorithme), il arrive souvent que l'on arrive à une équation qui lie $f(n)$ et $f(n/a)$, où a est un réel strictement supérieur à 1. Par exemple, plus tard dans le cours, un calcul de complexité nous mènera à évaluer une fonction f telle que $f(1) = 1$ et telle que pour tout entier naturel n*

$$f(n) \leq 2 + f(E(n/2))$$

(où $E(n/2)$ désigne la partie entière de $n/2$). Dans ce cas, il nous faudra appliquer une récurrence forte.

Exercice 2.9.4 *Soit (u_n) la suite définie par les données de $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1*

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

Calculer les premiers termes de cette suite, puis déterminer u_n en fonction de n.

2.10 Propriétés de $\mathbb{N}$

Pour terminer ce paragraphe, signalons des propriétés importantes de $\mathbb{N}$, liées au principe de récurrence.

On peut démontrer que le principe de récurrence est équivalente à la propriété suivante.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exercice 2.10.1 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Exprimer à l'aide de quantificateurs le fait que A admet un plus petit élément.*
2. *Soit P l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ pairs. Quel est le plus petit élément de P ?*

Citons aussi le théorème admis suivant.

Théorème 2.10.2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Exercice 2.10.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Exprimer à l'aide de quantificateurs le fait que A est majorée.*
2. *Exprimer à l'aide de quantificateurs le fait que A admet un plus grand élément.*
3. *Donner un exemple d'un tel ensemble.*

3 Sommes, suites remarquables

3.1 Manipulation des sommes

On utilise très souvent la notation $\sum$. Rappelons le sens de cette notation.

Définition 3.1.1 *Soit n_0 un entier. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments d'un ensemble E muni d'une opération $+$. Par exemple, E peut être égal à $\mathbb{R}$. On définit la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0-1}$ par récurrence de la manière suivante.*

$$\sum_{k=n_0}^{n_0-1} u_k = 0 \quad \textit{(c'est la somme vide)}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k = u_{n_0}$$

et pour tout $n \geq n_0 + 1$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} u_k\right) + u_n$$

On peut aussi écrire in extenso

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$$

Nous avons déjà utilisé cette notion, mais il est utile d'insister sur ce thème.

Exercice 3.1.2 *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Que vaut* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$ *?*

Exercice 3.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit*

$$S_n = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$$

1. *Calculer S_0, S_1 et S_2.*
2. *Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.*
3. *Connaissez vous une expression simple donnant S_n en fonction de n ?*

Proposition 3.1.4 *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles. Soient α et β deux réels. Alors pour tout entier $n \geq n_0$,*

$$\sum_{k=n_0}^{n} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_n \right) + \beta \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_n \right)$$

Exercice 3.1.5 *Démontrer ce résultat par récurrence.*

Exercice 3.1.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit*

$$S_n = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$$

1. *Calculer S_0, S_1 et S_2.*
2. *Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.*
3. *En utilisant des expressions déjà calculées de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$*, donner une autre expression pour S_n.*

Proposition 3.1.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$$

Exercice 3.1.8 *Démontrer cette proposition (on pourra utiliser une récurrence sur n).*

Exercice 3.1.9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels. Soit*

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)$$

1. *Exprimer S_0, S_1 et S_2 en fonction des u_i concernés.*

2. *Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.*

3. *Montrer par récurrence que $S_n = u_{n+1} - u_0$.*

4. *On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. Montrer que*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   En déduire que $S_n = u_{n+1} - u_0$.

Exercice 3.1.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit*

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. *Calculer S_1 et S_2.*

2. *Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.*

3. *Soit k un entier naturel non nul. Exprimer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ comme une fraction (en mettant ces fractions sous le même dénominateur).*

4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

3.2 Suites monotones

Définition 3.2.1 *Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.*

1. *On dit que u est croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*

2. *On dit que u est décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*

3. *On dit que u est constante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.*

4. *On dit que u est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

5. *On dit que u est strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.*

6. *On dit que u est strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.*

Exercice 3.2.2 *Dans chacun des exemples suivants, indiquer si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone, croissante, décroissante, constante.*

1. *$n_0 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{n}$.*

2. *$n_0 = 1$, et $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.*

3. $n_0 = 0$, *et* $\forall n \geq 0,\ u_n = 1$.

4. $n_0 = 0$, *et* $\forall n \geq 0,\ u_n = n^2$.

5. $n_0 = 0$, $u_0 = 1$, *et* $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + n$.

Exercice 3.2.3 *Soit* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite réelle. Soient les propositions logiques suivantes.*

A *: u est croissante.*

B *: u est décroissante.*

C *: u est monotone.*

D *: u est constante.*

E *: u est strictement croissante.*

F *: u est strictement décroissante.*

Indiquer le graphe des implications entre les six propositions.

Exercice 3.2.4 *Soit* $u = (u_n)_{n \geq 0}$ *une suite à termes réels positifs ou nuls. Pour tout entier naturel n, on pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ *est-elle monotone ?*

3.3 Suites arithmétiques

Définition 3.3.1 *Soient p et r deux nombres réels. La suite arithmétique de premier terme p et de raison r est la suite (u_k) définie par récurrence.*

$$u_0 = p \quad \text{et pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n + r$$

Exemples 3.3.2

1. *Une suite arithmétique est constante si et seulement si sa raison vaut* 0.

2. *Donner les* 5 *premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison* 1.

3. *Donner les* 5 *premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison* 2.

Exercice 3.3.3 *Soit* (u_k) *la suite arithmétique de premier terme* $u_0 = p$ *et de raison r. Soit n un élément de* $\mathbb{N}$.

1. *Exprimer u_n en fonction de p, r et n.*

2. *Soient m et n deux entiers naturels. Exprimer u_n en fonction de u_m, m et n.*

3. *Si $r = 0$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?*

Exercice 3.3.4 *Soit n un entier naturel non nul.*

1. *Rappeler la valeur de $\sum_{i=0}^{n} i$. Interpréter cette somme comme la somme des premiers termes d'une suite arithmétique.*

2. *Soient p et r deux réels. Soit (u_k) la suite arithmétique de premier terme p et de raison r. Exprimer $\sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de p, r et n.*

3.4 Suites géométriques

Définition 3.4.1 *Soient p et r deux nombres réels. La suite géométrique de premier terme p et de raison r est la suite (u_k) définie par récurrence.*

$$u_0 = p \quad \text{et pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = r \times u_n$$

Exercice 3.4.2 *Soit (u_k) la suite géométrique de premier terme $u_0 = p$ et de raison r. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.*

1. *Exprimer u_n en fonction de p, r et n.*

2. *Soient m et n deux entiers naturels. Exprimer u_n en fonction de u_m, m et n.*

3. *Si $r = 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?*

Exercice 3.4.3 *Soient r un nombre réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.*

1. *Montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Interpréter cette somme comme la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.*

2. *Soit p un réel. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme p et de raison r. Exprimer $\sum_{i=1}^{n} u_i$ en fonction de p, r et n.*

3.5 Suites de Fibonacci

Soit la suite définie de la manière suivante.

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Cette suite s'appelle suite de Fibonacci. Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci (XII-ème siècle). Ce dernier avait proposé un problème sur la reproduction des lapins.

Exercice 3.5.1 *Donner les* 10 *premiers termes de cette suite.*

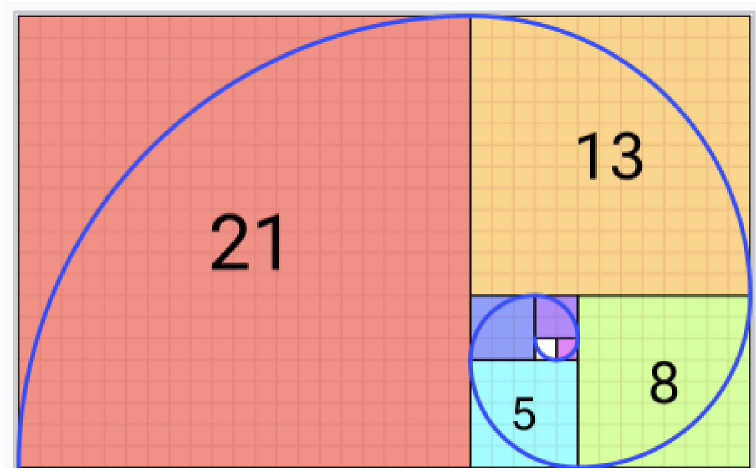
Exercice 3.5.2 *Dans un enclos fermé, on dépose un couple de lapereaux nouveaux nés. On suppose qu'un couple de lapereaux ne procrée qu'à partir de deux mois, et chaque début de mois, chaque paire de lapereaux en âge de procréer engendre un nouveau couple de lapereaux. On suppose que dans la période considérée, les lapins ne meurent pas. Le nombre de couples de lapins au début du mois n peut-il être décrit par la suite de Fibonacci ?*

Les suites de Fibonacci interviennent dans beaucoup de domaines de la science et de la nature : nombre de spirales de pommes de pin, de coeurs de tournesol ou d'autres fleurs.

Aster.

La spirale de Fibonacci est aussi présente dans maints endroits de la nature.

Ci-dessous : une spirale de Fibonacci.



Exercice 3.5.3 *Soit $P(x) = x^2 - x - 1$. Alors les deux racines de ce polynôme sont*

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

1. *remarquer que*
$$\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } {\varphi'}^2 = \varphi' + 1$$

2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - {\varphi'}^n\right)$$

Remarque 3.5.4 *Le nombre $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ci dessus est appelé nombre d'or. Il intervient en architecture par exemple, ou en peinture, comme une proportion idéale. Voir aussi l'exercice ci-dessous.*

Exercice 3.5.5 *Montrer que si le rapport d'une somme de deux longueurs sur la plus grande de ces longueurs est égal au rapport de la plus grande de ces longueurs sur la plus petite, alors ce rapport est égal au nombre d'or.*

Remarque 3.5.6 *Avec une construction assez proche de celle de la spirale de Fibonacci, mais qui utilise des rectangles dont la proportion entre le grand et le petit coté est égale au nombre d'or, on construit une autre spirale, appelée* **sprirale d'or**.

4 Théorie des ensembles

4.1 Ensembles : définition, appartenance et inclusion

On rappelle ci-dessous quelques définitions.

Définition 4.1.1 • *Un ensemble est une collection d'objets deux à deux distincts, donnés dans un ordre indifférent. Chacun de ces objets est appelé élément de l'ensemble. On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.*

- *Si chaque élément d'un ensemble E est également élément de l'ensemble F on dit que E* **est inclus** *dans F, ou que E est* **une partie** *ou un* **sous-ensemble** *de F et on note $E \subset F$. On a donc :*

$$E \subset F \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F).$$

- *Il existe par convention un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'***ensemble vide** *noté $\emptyset$.*

Remarque 4.1.2 *La notion d'inclusion correspond à la notion d'implication en termes d'appartenance à un ensemble. En effet, $E \subset F$ signifie "$x \in E \implies x \in F$".*

Pour définir un ensemble, on peut donner la liste de ses éléments. On peut aussi parfois le décrire, s'il s'agit d'un ensemble d'éléments qui vérifient certaines propriétés.

Exemples 4.1.3 1. $E = \{1, 7, \sqrt{3}, \pi\}$.

2. $F = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \ , \ x = 2^n\}$. *On peut aussi l'écrire :* $F = \{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Méthode pour montrer qu'un ensemble est vide. Soit E un ensemble. Pour montrer que E est égal à l'ensemble vide, on raisonne souvent par l'absurde : on suppose qu'il existe un élément x dans E et on montre que c'est absurde.

On suppose qu'il existe un élément x da ns E.
$\vdots$
suite d'arguments logiques qui permettent darriver à une proposition logique fausse.
$\vdots$
C'est absurde. On en déduit qu'il n'existe pas d'éléments dans E, donc que $E = \emptyset$.

Exercice 4.1.4 *Soit $E = \{x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ x < y\}$. Montrer que $E = \emptyset$.*

Méthode pour montrer une inclusion. Pour montrer une inclusion $E \subset F$, on revient souvent à la définition : on montre $\forall x \in E, x \in F$.

Il faut alors rédiger de la manière suivante.

Soit x un élément de E.
$$\vdots$$
suite d'arguments logiques qui permettent de conclure que $x \in F$.
$$\vdots$$
Donc $x \in F$. On déduit que tout élément x de E appartient à F, donc que $$E \subset F$$

Exercice 4.1.5 *Dans $\mathbb{R}^2$, on note*

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x|, |y|) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$\mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x|, |y|) \leq 1\right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 1\right\}$$

1. *Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il inclus dans $\mathcal{A}$?*
2. *Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est-il inclus dans $\mathcal{C}$?*
3. *Montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il inclus dans $\mathcal{D}$?*
4. *Existe-t-il des relations d'inclusion entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$?*
5. *Compléter le graphe des inclusions entre les quatre ensembles.*

Méthodes pour montrer une égalité d'ensembles

Pour montrer que $E = F$, on montrera souvent que $E \subset F$ et que $F \subset E$. Cela revient donc à démontrer $$(x \in E \implies x \in F) \quad \text{et} \quad (x \in F \implies x \in E)$$

Exercice 4.1.6 *Soit $E = \{x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x < y\}$. Montrer que $E = \{0\}$.*

Parfois, on peut montrer une égalité d'ensembles en utilisant des équivalences.

Pour montrer que $E = F$, on peut montrer $$(x \in E) \iff (x \in F)$$

Remarque 4.1.7 *Il ne faut pas confondre l'appartenance d'un élément à un ensemble et l'inclusion d'un ensemble dans un autre. Soit A un ensemble, écrire $x \in A$ signifie que x est l'un des éléments de A. Si B est un autre ensemble, écrire $B \subset A$ signifie que tous les éléments de B sont aussi des éléments de A.*

Exercice 4.1.8 *Compléter les propositions ci-dessous par $\in$ ou $\subset$.*

1. $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$
2. $2 \ldots \mathbb{Z}$
3. $\{2, 5\} \ldots \mathbb{Z}$,
4. $\{2\} \ldots \mathbb{Z}$.

Définition 4.1.9 *Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, pour tout ensemble A,*

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

Exercice 4.1.10 *Écrire $\mathcal{P}(E)$ in extenso dans chacun des cas suivants.*

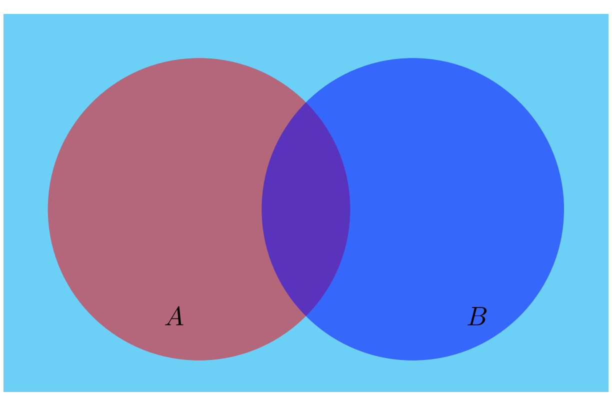
1. $E = \{\pi\}$.
2. $E = \{1, 2, 3\}$.
3. $E = \emptyset$.

Exercice 4.1.11 *Soient E un ensemble.*

1. *L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ peut-il être vide ?*
2. *Soit x un élément de E. Cet élément x appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?*

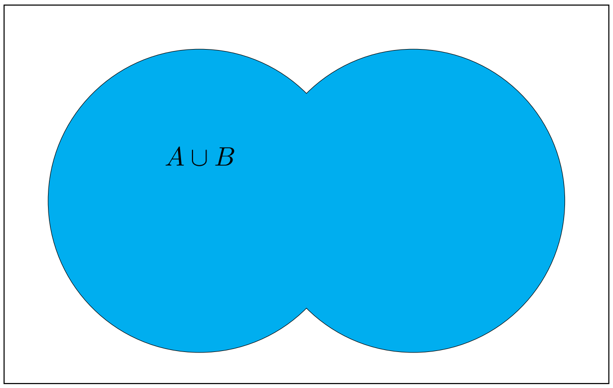
4.2 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles.



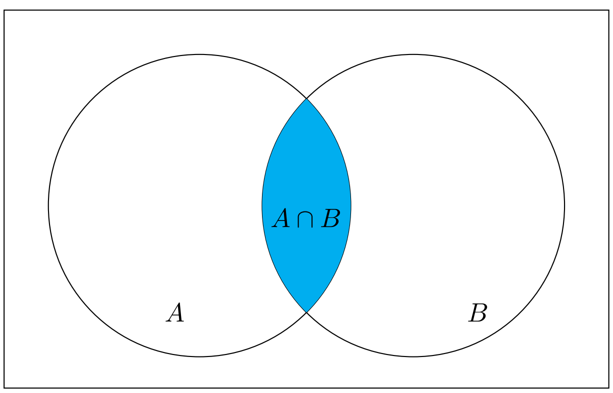
Définition 4.2.1 *La* **réunion** *de A et B notée $A \cup B$ est formée des éléments qui appartiennent à A ou à B. On a donc*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$



Définition 4.2.2 *Soient A et B deux ensembles. L'***intersection** *de A et B notée $A \cap B$ est formée des éléments qui appartiennent à A et à B. On a donc*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$



Définition 4.2.3 *Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont* **disjoints**.

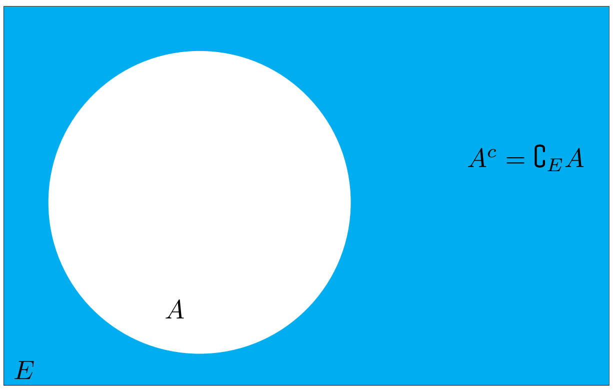
Exercice 4.2.4 *Écrire plus simplement les ensembles suivants.*

- $A \cup \emptyset = \dots$
- $A \cap \emptyset = \dots$
- $A \cap A = \dots$
- $A \cup A = \dots$

Définition 4.2.5 *Soit E un ensemble et A une partie de E. Le* **complémentaire** *de A dans E noté $\complement_E A$ (ou parfois A^c) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On a donc*

$$\complement_E A = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Notation. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'ensemble E dans lequel le complémentaire est pris, on notera A^c plutôt que $\complement_E A$.



Exercice 4.2.6 *Soient E un ensemble et A une partie de E. On note $A^c = \complement_E A$. Écrire plus simplement les ensembles suivants.*

$A^c \cup A = \ldots$

$A^c \cap A = \ldots$

Remarque 4.2.7 *L'union, l'intersection et le complémentaire sont la traduction en terme d'appartenance à un ensemble des opérations logiques "et", "ou" et "non".*

Proposition 4.2.8 *Si A, B, C sont des sous-ensembles de E, on a les égalités suivantes.*

1. *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$
2. *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. *Distributivité 1 :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. *Distributivité 2 :* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \subset B \iff B^c \subset A^c$.
6. $(A^c)^c = A$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, *et* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Preuve Ces propriétés se déduisent d'équivalences de propositions logiques vues dans le chapitre 2.

Par exemple $A \cup B = B \cup A$: dire que $x \in A \cup B$ signifie que $x \in A$ ou $x \in B$, ce qui est équivalent à $x \in B$ ou $x \in A$, c'est-à-dire $x \in B \cup A$. Ainsi, $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in B \cup A$.
On en déduit que $A \cup B = B \cup A$.

Un autre exemple : la distributivité de $\cup$ sur $\cap$ (distributivité 1). On va utiliser l'équivalence de propositions logiques suivante.

$$p \text{ ou } (q \text{ et } r) \equiv (p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r) \tag{1}$$

Dire que x est un élément de $A \cup (B \cap C)$ signifie que

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \cap C$$

c'est équivalent à

$$x \in A \quad \text{ou} \quad (x \in B \quad \text{et} \quad x \in C)$$

c'est-à-dire d'après (1)

$$(x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B) \quad \text{et} \quad (x \in A \quad \text{ou} \quad x \in C)$$

ce qui veut dire que

$$x \in (A \cup B) \quad \text{et} \quad x \in (A \cup C)$$

ce qui s'écrit aussi

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

En conclusion, on a montré que

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \cap C \quad \text{si et seulement si} \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Cela montre que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

En résumé, si p, q, r sont respectivement les propositions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, la propriéte 3 correspond à l'équivalence de propositions logiques (1), c'est-à-dire p ou (q et r) $\equiv$ (p ou q) et (p ou r). $\square$

Exercice 4.2.9 *Si p, q, r sont respectivement les propositions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, écrire la propriété 4 sous forme d'équivalence de propositions logiques.*

Exercice 4.2.10 *Démontrer les points 4 et 5 et 6 de cette proposition.*

Exercice 4.2.11 *En utilisant les points 3 et 6 de la proposition 4.2.8, montrer le point 4 de cette proposition, c'est-à-dire*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Remarque 4.2.12 *Par l'associativité de $\cup$ et de $\cap$, on peut noter sans ambiguïté sans parenthèses $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$.*

Exercice 4.2.13 *Soit n un entier naturel non nul et soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E. On note $\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1$ et pour tout $k \in [[1, n-1]]$*

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cup A_{k+1}$$

De même, on note $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1$ et pour tout $k \in [[1, n-1]]$

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \cap A_{k+1}$$

Soit x un élément de E.

1. *Exprimer la condition pour que x appartienne à $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ à l'aide d'un quantificateur.*
2. *Même question pour $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.*

On peut aussi écrire

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n \quad \textit{et} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

Définition 4.2.14 *Plus généralement, soit I un ensemble non vide (pas nécessairement fini). Soient A_i pour $i \in I$ des ensembles. On définit*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x,\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$
$$\textit{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x,\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

Si $I = \emptyset$, la même définition donne $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.

On peut aussi parler de $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i$ si le contexte concerne les parties d'un ensemble E. Dans ce cas, on définit $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E,\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$, et alors $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = E$.

Pour définir les A_i comme ci-dessus, on écrit souvent : soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles.

Exercice 4.2.15 *Soient A et $(A_i)_{i\in I}$ des parties d'un ensemble E. Démontrer les assertions suivantes. Pour chacune d'entre elles, indiquer si la réciproque est vraie. Justifier la réponse.*

1. *Si* $\forall i \in I,\ A \subset A_i$, *alors* $A \subset \bigcap_{i\in I} A_i$.
2. *Si* $\exists i \in I,\ A \subset A_i$, *alors* $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
3. *Si* $\forall i \in I,\ A_i \subset A$, *alors* $\bigcup_{i\in I} A_i \subset A$.
4. *Si* $\exists i \in I,\ A_i \subset A$, *alors* $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A$.

Proposition 4.2.16 *Soient A et $(A_i)_{i\in I}$ des parties d'un ensemble E. Alors*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \textit{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$$

Exercice 4.2.17 *Démontrer cette proposition.*

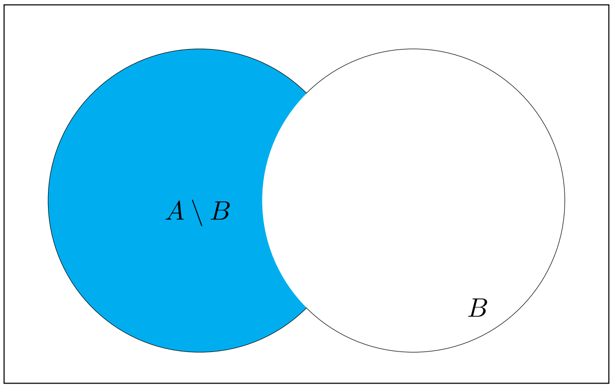
Exercice 4.2.18 *Montrer les égalités suivantes.*

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$.
2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

Exercice 4.2.19 *Soit E un ensemble. On considère deux familles de parties de E notées $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$. On suppose que pour tout $i \in I$, $A_i \cup B_i = E$. Montrer que*

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

Définition 4.2.20 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. L'ensemble $A \setminus B$ est l'ensemble formé des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On a donc $A \setminus B = A \cap (\complement_E B)$. En particulier, $E \setminus A = \complement_E A$, $E \setminus \emptyset = E$*



Exercice 4.2.21 *1. Montrer que* $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

2. Montrer que $A \setminus B = A$ *si et seulement si* $B \setminus A = B$.

4.3 Produit cartésien

Définition 4.3.1 *Soient* E *et* F *deux ensembles. Le* **produit cartésien** *de* E *et* F *noté* $E \times F$ *est l'ensemble des couples* (x, y) *tels que* x *est élément de* E *et* y *est élément de* F.

Exercice 4.3.2 *Soient* $A = \{0, 1\}$ *et* $B = \{2, 3, 4\}$. *Déterminer le produit cartésien* $A \times B$.

Exercice 4.3.3 *Soient* $A = [1, 3]$ *et* $B = [-1, 0]$ *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *Représenter graphiquement le produit cartésien* $A \times B$.

Exercice 4.3.4 *Soit* $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max(|x|, |y|) \leq 1\}$. *Faire une figure. Existe-t-il deux sous-ensembles* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\mathcal{C} = A \times B$ *?*

Exercice 4.3.5 *Soit* $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Faire une figure. Existe-t-il deux sous-ensembles* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\mathcal{D} = A \times B$ *?*

Exercice 4.3.6 *1. Dans* $\mathbb{R}^2$, *décrire l'ensemble* $\mathcal{D}$ *des solutions* (x, y) *de l'équation* $x + y = 0$ *en remplissant les trous dans l'égalité suivante.*

$$\mathcal{D} = \{(\ \dots \ , \ \dots) \ , \ \dots \ \in \mathbb{R}\}$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, *décrire d'une façon similaire l'ensemble* $\mathcal{P}$ *des solutions* (x, y, z) *de l'équation* $x + y = 0$.

3. Dans $\mathbb{Z}^2$, *décrire l'ensemble* $\mathcal{Q}$ *des solutions* (x, y) *de* $x^2 + y^2 \leq 1$ *en donnant la liste de ses éléments.*

Exercice 4.3.7 *Soient* E, F, G, H *quatre ensembles.*

1. Montrer que $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

On note maintenant $A = (E \times F) \cup (G \times H)$ et $B = (E \cup G) \times (F \cup H)$.

2. *L'une des inclusion $A \subset B$ ou $B \subset A$ est toujours vraie. Déterminer laquelle et en donner une preuve.*

3. *Donner un contre-exemple qui montre que l'autre inclusion n'est pas toujours vraie.*

Définition 4.3.8 *Soit n un entier naturel.*

1. *Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles, le produit cartésien $P = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$. Cela inclut le cas particulier $n = 0$ où le produit est $P = \{()\}$.*

2. *Soit E un ensemble, on note $E^n = E \times \cdots \times E$ le produit cartésien de n copies de E. Pour $n = 0$, on obtient $E^0 = \{()\}$.*

4.4 Mots

Définition 4.4.1 *Soit E un ensemble.*

1. *Soit k un entier naturel. Un mot de E de longueur k est un k-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de la forme $m = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$. Il peut aussi s'écrire $x_1 \dots x_k$.*

2. *L'ensemble des mots de E est noté E^*.*

3. *Le mot vide $()$ se note ε. Il est de longueur nulle.*

4. *Si x est un mot, sa longueur est notée $|x|$.*

5. *L'ensemble E est appelé alphabet. Ses éléments sont appélés symboles ou lettres.*

Exemple 4.4.2 *Soit $E = \{a, b\}$. Alors a est un mot, b aussi. ab, aab, ababba sont aussi des mots.*

Remarque 4.4.3 *Soient E un ensemble et $\varepsilon = ()$ son mot vide. Il ne faut pas confondre ε et $\{\} = \emptyset$.*

Exercice 4.4.4 *Soient E un ensemble et ε son mot vide. Soit $A = \{\varepsilon\}$. A est-il un élément de E^* ? Est-ce un élément de $\mathcal{P}(E)$? Décrire $\mathcal{P}(A)$.*

Définition 4.4.5 *La concaténation de deux mots x et y est le mot xy obtenu en mettant bout à bout x et y. Plus précisément, si $x = x_1, \dots x_k$ est un mot de longueur k et si $y = y_1 \dots y_l$ est un mot de longueur l, le concaténé xy de x et y est le mot $x_1, \dots x_k y_1 \dots y_l$ de longueur $k + l$.*

Exemple 4.4.6 *Soit $E = \{a, b\}$. Quel est le concaténé de ab et ba ? Quel est le concaténé de ε et de baba ?*

4.5 Autres exercices sur les ensembles

Exercice 4.5.1 *Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Est-il toujours vrai que $A \subset C$? Justifier.*

Exercice 4.5.2 *Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que*

$$A \subset B \subset C$$

Exercice 4.5.3 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Répondre aux questions suivantes, en justifiant bien sûr la réponse.*

1. *A-t-on toujours $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?*
2. *A-t-on toujours $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?*
3. *Si l'une des propositions logiques ci-dessus n'est pas toujours vraie, peut-on y remplacer l'égalité par une inclusion pour obtenir une proposition qui soit toujours vraie ?*

Exercice 4.5.4 *Soit E un ensemble. Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on définit la différence symétrique de A par B, notée $A\Delta B$ comme suit.*

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\}$$

1. *Soit A un sous-ensemble de E. Donner une description simple des quatre ensembles suivants : $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta(E \setminus A)$.*
2. *Montrer que pour tous les sous-ensembles A et B de E,*
$$A\Delta B = (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$$
3. *Montrer que pour tous sous-ensembles A et B de E,*
$$(A\Delta B = \emptyset) \iff A = B$$
4. *Montrer que pour tous les sous-ensembles A, B et C de E,*
$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

5 Applications

5.1 Premières définitions

Soient E et F des ensembles.

Définition 5.1.1 *Une application f allant de E dans F est une correspondance qui associe à tout élément $x \in E$* un unique *élément $f(x) \in F$. On note*

$$\begin{array}{rrcl} f: & E & \to & F \\ & x \in E & \mapsto & f(x) \in F. \end{array}$$

Exercice 5.1.2 *Dans les exemples suivants, indiquer si f est une application.*

1. *(définition d'une application par extension) Soient*

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

On définit $f : A \to B$ par

$$f(0) = 5, f(1) = 2, f(2) = 3, \text{ et } f(3) = 4$$

2. *Avec les mêmes A et B, on définit $f : A \to B$ par $\forall a \in A : f(a) = 2$.*

3. *Avec les mêmes A et B, on définit $f : A \to B$ par*

$$f(0) = 2, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = \{3, 4\}$$

4. *(définition d'une application en compréhension)*

$$f \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ : f(n) = 2n$.

5. $$f \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ : f(n) = n - 1$.

Définition 5.1.3 *Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F. On appelle graphe de f le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $E \times F$ défini par $\mathcal{G} = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$.*

Notation. On écrit $\exists!$ pour "il existe un unique".

Proposition 5.1.4 *Soient E et F deux ensembles et soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $E \times F$. Alors $\mathcal{G}$ est le graphe d'une application f si et seulement si*

$$\forall x \in E, \exists! y \in F,\ (x, y) \in \mathcal{G}$$

Alors $f(x) = y$ si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{G}$.

Exercice 5.1.5 *Décrire le graphe de chacune des applications de l'exercice 5.1.2.*

Définition 5.1.6 *Soit $f : E \to F$ une application.*

- *Si x est un élément de E et si $y = f(x)$, alors y est appelé* l'image *de x (par f), et x est appelé* antécédent *de y (par f).*
- *E est* l'ensemble de départ *(de f), et F est* l'ensemble d'arrivée *(de f).*

Exercice 5.1.7 *Soit f une application de E dans F.*

1. *Soit x un élément de E. Cet élément est-il nécessairement l'antécédent d'un élément y de F ?*

2. *Soit x un élément de E et $y = f(x) \in F$. L'élément y peut-il avoir d'autres antécédents que x ?*

3. *Soit y un élément de F. Cet élément y est-il nécessairement l'image d'un élément x de E ?*

5.2 Image directe, image réciproque

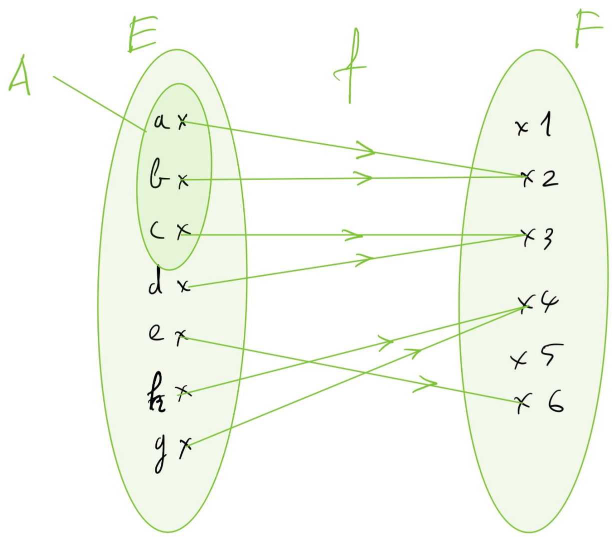
Soit $f : E \to F$ une application.

Définition 5.2.1 *Pour toute partie A de $E, A \subset E$, on définit* l'image *(ou bien* l'image directe*) $f(A)$ comme*

$$f(A) = \{f(a),\ a \in A\} = \{y \in F,\ \exists a \in A, y = f(a)\}.$$

Autrement dit, $f(A)$ est une partie de F formée par les images $f(a)$, où a parcourt $A \subset E$.

Exemple 5.2.2 *Soit f l'application de E dans F définie dans la figure suivante, où $A = \{a, b, c\}$. Déterminer $f(A)$.*



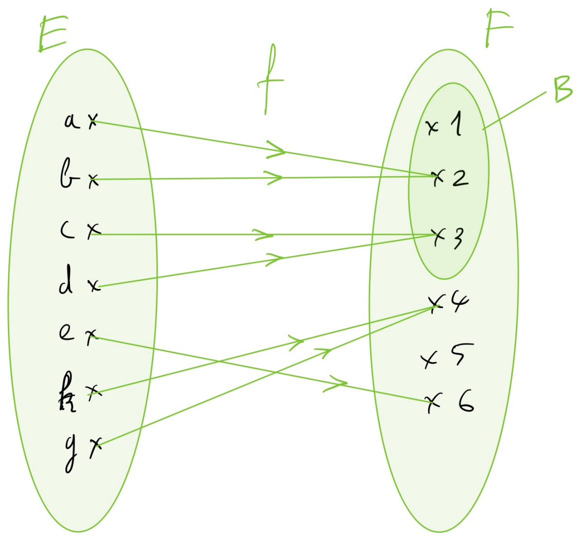
Définition 5.2.3 *Pour toute partie B de $F, B \subset F$,* l'image réciproque $f^{inv}(B)$ *est définie par*

$$f^{inv}(B) = \{a \in E : f(a) \in B\}.$$

Remarque 5.2.4 *La notation généralement utilisée pour f^{inv} est plutôt f^{-1}. Mais cette notation f^{-1} pour l'image réciproque peut prêter à confusion car cette notation f^{-1} est également utilisée pour désigner l'application réciproque de f (que nous reverrons un plus tard) dans le cas où f est bijective.*

C'est pourquoi nous utilisons dans ce cours cette notation f^{inv}.

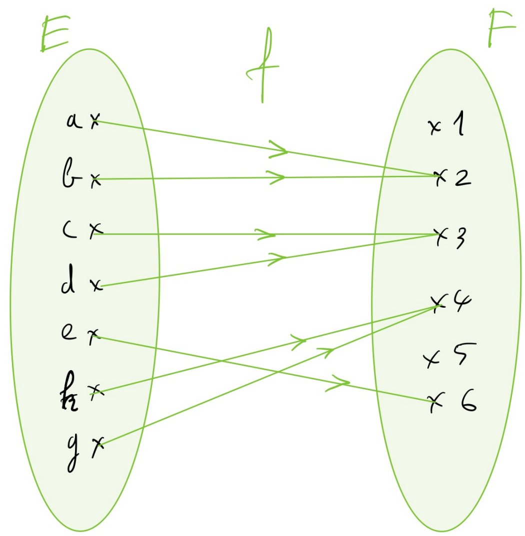
Exemple 5.2.5 *Soit f l'application de E dans F définie dans la figure suivante, où $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $f^{inv}(B)$.*



Exercice 5.2.6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application donnée par $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles suivants.*

1. $f(\{-1, 1\})$, $f(\{-2, 2\})$.
2. $f([1, 2])$, $f([-1, 1])$ $f(\{1, 3\})$, $f(\{-1, 3\})$.
3. $f^{inv}([1, 4])$, $f^{inv}(\{1, 9\})$, $f^{inv}(\{2\})$.

Exercice 5.2.7 *On reprend les exemples 5.2.2 et 5.2.5. On considère donc l'application f de E dans F définie dans la figure ci-dessous, où $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $f^{inv}(f(A))$ et $f(f^{inv}(B))$. Que constate-t-on ?*



Exercice 5.2.8 *Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F.*

1. *Montrer que $A \subset f^{inv}(f(A))$.*
2. *Montrer que $f(f^{inv}(B)) \subset B$.*

5.3 Composition des applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

Définition 5.3.1 L'application composée *de g et f, notée $g \circ f$, est une application allant de E à G selon la formule*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & G, \\ & x \in E & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in G. \end{array}$$

Proposition 5.3.2 *Soient E, F, G, H quatre ensembles. Soit f (resp. g, h) une application de E dans F (resp. F dans G, resp G dans H)*

$$f \ : \ E \to F \quad , \quad g \ : \ F \to G \quad , \quad h \ : \ G \to H \quad ,$$

Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Exercice 5.3.3 *Démontrer cette proposition.*

Si f et g sont des applications de E dans E, les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies. Ce sont aussi des applications de E dans E, mais il est en général **faux** que $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 5.3.4 *Soient $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ des applications données par*

$$f(n) = n^2, \quad g(n) = n + 1$$

Montrer que $f \circ g \neq g \circ f$.

5.4 Injections, surjections, bijections

Définition 5.4.1 *Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.*

- *On dit que f est* **injective** *si tout élément de F a au plus un antécédent. Autrement dit, f est injective si deux éléments distincts ne peuvent pas avoir la même image, c'est-à-dire si*

  $$\forall x, y \in E, \ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

  Le plus souvent, on utilise la contraposée de cette proposition.

  f est injective si

  $$\forall x, y \in E, \ f(x) = f(y) \implies x = y$$

- *On dit que f est* **surjective** *si tout élément de F a au moins un antécédent.*
- *On dit que f est* **bijective** *si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si chaque élément de F a un antécedent unique dans E.*

Remarque 5.4.2 *La caractérisation de l'injectivité la plus utilisée est la seconde citée ci-dessus, c'est-à-dire :*

f *est* **injective** *si et seulement si* $$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y$$

Définition 5.4.3 *Soit f une application bijective de E dans F. On définit son* **application réciproque** f^{-1} *de la manière suivante.*

Pour tout $y \in F$. Comme f est bijective, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors on note $f^{-1}(y) = x$.

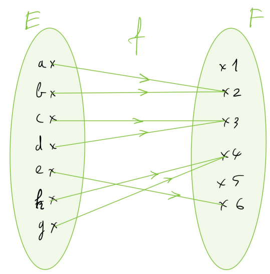
Remarque 5.4.4 *Soit f une application de E dans F bijective. Alors f^{-1} est l'unique application de F dans E qui vérifie*

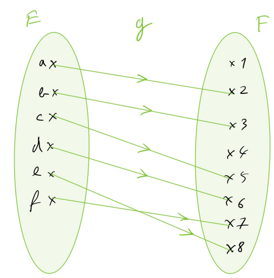
$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

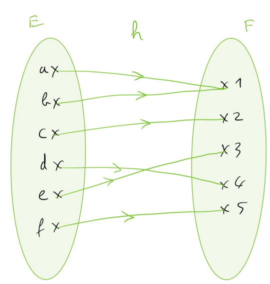
Exercice 5.4.5 *Écrire les définitions de surjectivité et de bijectivité à l'aide de quantificateurs.*

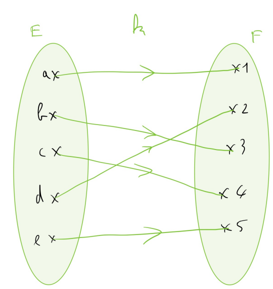
Pour la bijectivité, on pourra utiliser le symbole $\exists!$ qui signifie "il existe un unique".

Exercice 5.4.6 *Parmi les applications définies par les figures ci-dessous, indiquer celles qui sont injectives, celles qui sont surjectives et celles qui sont bijectives.*









Exercice 5.4.7 *Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont injectives, celles qui sont surjectives et celles qui sont bijectives.*

1. $f_1 \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$.
2. $f_2 \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$.
3. $f_3 \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^3$.
4. $f_4 \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_4(n) = n + 1$.

5. $f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $f_5(n) = n + 1$.

Exercice 5.4.8 *Soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F.*

1. *Si f est injective, montrer que* $A = f^{inv}(f(A))$.

2. *Si f est surjective, montrer que* $f(f^{inv}(B)) = B$.

Exercice 5.4.9 *Soit f une application de E dans F.*

1. *Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E,* $A = f^{inv}(f(A))$.

2. *Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de E,* $f(f^{inv}(B)) = B$.

Exercice 5.4.10 *Pour tout x de $\mathbb{R}$, on note $E(x)$ sa partie entière. Ainsi, $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est donc l'unique entier tel que*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Soit a l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à n associe $2n$, et soit b l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à n associe $E\left(\frac{n}{2}\right)$.

1. *Montrer que* $b \circ a = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

2. *Montrer que a est injective et non surjective.*

3. *Montrer que b est surjective et non injective.*

Exercice 5.4.11 *Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.*

1. *Montrer que s'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est injective. Donner un exemple où f vérifie cette propriété et où f est non surjective.*

2. *Montrer que s'il existe une application h de F dans E telle que $f \circ h = \mathrm{id}_F$, alors f est surjective. Donner un exemple où f vérifie cette propriété et où f est non injective.*

3. *On suppose qu'il existe des applications g et h de F dans E telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ h = \mathrm{Id}_F$. Déduire des questions précédentes que f est bijective. Montrer que $g = h$.*

5.5 Opérations sur les applications

Soient E et F deux ensembles. On suppose que F est muni d'une opération. Alors cette opération permet de définir une opération sur l'ensemble des applications de E dans F.

On se contente ici de l'exemple où $F = \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni des opérations $+$ et $*$ (mais on note souvent ab au lieu de $a * b$). Soient f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$. Alors on peut définir les applications $f + g$ et $f * g$ (qu'on peut noter fg).

$$\begin{aligned} f+g \ : \ & E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} fg \ : \ & E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x) \end{aligned}$$

Les fonctions caractéristiques d'ensembles sont des exemples intéressants d'applications à valeurs dans $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Définition 5.5.1 *Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit l'application $\chi_A \ : \ E \to \{0, 1\}$ telle que*

$$\forall x \in E, \ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Exercice 5.5.2 *Soit E un ensemble, et soient A, B deux parties de E.*

1. *Montrer que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.*
2. *Montrer que $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.*

5.6 Applications et familles

Définir un n uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments d'un ensemble E revient à définir une application

$$\begin{aligned} [[1, n]] &\to E \\ i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

De même, si I est un ensemble quelconque, définir une famille x_i d'éléments d'un ensemble E revient à définir une application

$$\begin{aligned} I &\to E \\ i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Par exemple, nous avons considéré plus haut une famille d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$. Cela revient à considérer un ensemble $\mathcal{E}$ d'ensembles et une application

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{E} \\ i &\mapsto A_i \end{aligned}$$

5.7 Bases du dénombrement

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments.

Si l'on compte les éléments d'un ensemble fini E, on établit une bijection entre cet ensemble et un ensemble $[[1, n]]$. Alors cet entier n est unique et c'est le cardinal de E.

L'unicité de n n'est pas très difficile à démontrer, mais pas si évidente qu'il n'y paraît. Nous allons en omettre la preuve dans ce cours, ainsi que celle de quelques autres résultats.

Définition 5.7.1 *On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier n et une bijection de E dans $[[1, n]]$. L'entier n est unique. Il est appelé le* **cardinal** *de l'ensemble E. On le note $n = Card(E)$. Le cardinal de $\emptyset$ est $Card(\emptyset) = 0$.*

On dit qu'un ensemble E est infini s'il n'est pas fini.

Théorème 5.7.2 *Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et q.*

1. *$p \leq q$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F.*
2. *$p \geq q$ si et seulement s'il existe une surjection de E sur F.*
3. *$p = q$ si et seulement s'il existe une bijection de E sur F.*
4. *Si $p = q$, et si f est une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *(i) f est injective*
   - *(ii) f est surjective*
   - *(iii) f est bijective.*
5. *En particulier, si E est un ensemble fini et si f est une application de E dans E, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *(i) f est injective*
   - *(ii) f est surjective*
   - *(iii) f est bijective.*

Exemples 5.7.3 *Ces résultats ne concernent que les ensembles finis, comme le montrent les exemples suivants.*

1. *Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à n associe $f(n) = n + 1$. Alors f est injective non surjective.*
2. *Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à n associe $f(n) = E\left(\frac{n}{2}\right)$ (où pour tout réel x, $E(x)$ désigne la partie entière de x). Alors f est une application surjective non injective.*

Corollaire 5.7.4 *Si E est un ensemble fini et si $F \subset E$, alors F est fini et $Card(F) \leq Card(E)$. De plus, $Card(E) = Card(F)$ si et seulement si $F = E$.*

Proposition 5.7.5 *Les parties finies de $\mathbb{N}$ sont les parties majorées de $\mathbb{N}$.*

Théorème 5.7.6 *Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \cup F$ est fini et*

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F) \tag{2}$$

Exercice 5.7.7

1. *On suppose dans cette question que E et F sont disjoints. Que devient la formule (2) ? Soient m et n les cardinaux respectifs de E et F. Il existe donc une bijection f de E dans $[[1, m]]$ et g de F dans $[[1, n]]$. Construire une bijection h de $E \cup F$ dans $[[1, m+n]]$ et en déduire le résultat dans ce cas.*

2. *Montrer que $Card(E \setminus F) = Card(E) - Card(E \cap F)$*

3. *En déduire la démonstration du théorème dans le cas général.*

Exercice 5.7.8 *Soient $E_1, \ldots, E_n$, n ensembles finis deux à deux disjoints. Montrer que*

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(E_i)$$

Définition 5.7.9 *Soit E un ensemble. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des parties de E. On dit que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un* **partage** *de E si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) La réunion de ces ensembles est égale à E.

(ii) Si $i \neq j$, alors $E_i \cap E_j = \emptyset$.

De plus, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est une **partition** *de E si c'est un partage et si de plus, la condition suivante est vérifiée.*

(iii) Aucun des ensembles E_i n'est vide.

Ainsi, si E est un ensemble fini et si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un partage (ou une partition) de E, alors

$$\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i)$$

Exercice 5.7.10

1. *Soit E un ensemble fini. Montrer que*

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} 1$$

2. *Soit A une partie de E. Soit χ_A la fonction caractéristique de A (donc χ_A est l'application de E dans A qui à x associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon). Montrer que*

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x)$$

Théorème 5.7.11 *Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $Card(E \times F) = Card(E) \cdot Card(F)$.*

Exercice 5.7.12 *Dans cet exercice, on souhaite démontrer le théorème précédent.*

1. *Montrer que*
$$E \times F = \bigcup_{x \in E} (\{x\} \times F)$$
et que les ensembles qui interviennent dans cette réunion sont deux à deux disjoints.

2. *En déduire le résultat.*

Corollaire 5.7.13 *Soient $E_1, \ldots, E_k$ k ensembles finis.*

$$Card(E_1 \times \cdots \times E_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(E_i)$$

Exercice 5.7.14 *Démontrer ce résultat par récurrence.*

Exercice 5.7.15 *Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On va démontrer que $Card(\mathcal{A}(E, F)) = p^n$.*

1. *On écrit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Montrer que l'application φ suivante est bijective*
$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathcal{A}(E, F) &\to F^n = F \times \cdots \times F \\ f &\mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \end{aligned}$$

2. *Montrer que $Card(\mathcal{A}(E, F)) = p^n$ (on pourra utiliser le corollaire 5.7.13).*

5.8 Coefficients binomiaux

Rappelons d'abord la définition de la fonction "factoriel".

Définition 5.8.1 *Soit n un entier naturel. On appelle "n factoriel" et note $n!$ l'entier défini par récurrence de la manière suivante.*

1. $0! = 1$

2. *si $n \geq 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$.*

Ainsi, si $n > 0$, $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et $0! = 1$.

Exemples 5.8.2 $1! = 1$, $2! = 2$ *et* $3! = 6$.

Remarque 5.8.3 *On peut montrer que si E et F sont des ensembles à n éléments, le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$. En particulier, $n!$ est égal au nombre d'ordres possibles pour n objets.*

Définition 5.8.4 *Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. Une* ***combinaison de*** k ***éléments parmi*** n *est une partie à k éléments d'un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.*

Par exemple si on a 50 personnes, il y a $\binom{50}{10}$ échantillons possibles de 10 personnes.
Si on dispose d'un jeu de 32 cartes, il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles différentes de 8 cartes.

Proposition 5.8.5

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, on a: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

3. *Si $0 < k < n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.*

La propriété 5.8.53 est à la base du "triangle de Pascal" dont les premières lignes sont représentées sur la figure 1

Exercice 5.8.6 *On veut démontrer le point 3 de la proposition 5.8.5, c'est-à-dire que pour tous entiers n et k tels que $0 < k < n$, on a :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Soit n un entier tel que $n \geq 2$, et soit E un ensemble à n éléments. Pour tout entier $l \leq n$, on note $\mathcal{P}(E)_l$ l'ensemble des parties de E de cardinal l.

1. *Soient x un élément de E et soit k un entier tel que $0 < k < n$. Montrer que*
$$\mathcal{P}(E)_k = \left\{A \cup \{x\},\ A \in \mathcal{P}\left(E \setminus \{x\}\right)_{k-1}\right\} \cup \mathcal{P}\left(E \setminus \{x\}\right)_k$$
(pour toute partie A de E, on pourra distinguer les cas où $x \in A$ et où $x \notin A$).

2. *En déduire que*
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Figure 1: Triangle de Pascal

Corollaire 5.8.7 *Si $0 \leq k \leq n$ sont deux entiers naturels, on a :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve. Récurrence sur n, en utilisant la proposition 5.8.5 3.

Proposition 5.8.8 *(Formule du binôme) Soient x et y deux réels (ou deux complexes) et n un entier naturel. On a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

Corollaire 5.8.9 *Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de parties de E est égal à 2^n.*

Exercice 5.8.10

1. *Développer l'expression $f(x) = (x+1)^n$.*
2. *En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.*
3. *En déduire que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

Exercice 5.8.11 *Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

1. *Soit l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^n$ qui à toute partie A de E associe $f(A) = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ tel que pour tout $i \in [[1,n]]$, $a_i = 1$ si $x_i \in A$ et $a_i = 0$ si $x_i \notin A$.*

2. Montrer que f est bijective, et retrouver le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5.8.12 *Soit E un ensemble fini de cardinal n.*

Nous avons déjà vu Si A est une partie de E, nous allons utiliser la fonction caractéristique χ_A déjà vue au chapitre 5, paragraphe 5.5. Pour rappel, χ_A est l'application de E dans $\{0,1\}$ qui à x associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. *Soit $\mathcal{A}(E,\{0,1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. Montrer que l'application suivante est bijective.*

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{A}(E,\{0,1\}) \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

2. *En déduire une autre façon de calculer* $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$ *(en utilisant l'exercice 5.7.15).*

6 Relations binaires sur un ensemble

6.1 Généralités

Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est une façon de lier certains éléments de E entre eux. Par exemple, la relation usuelle $\leq$ sur les nombres entiers permet de comparer les éléments de $\mathbb{Z}$ entre eux.

Définition 6.1.1 *Une relation binaire $\mathcal{R}$ de E est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$. Si $(x,y) \in \mathcal{G}$, on dit que x est en relation avec y (par $\mathcal{R}$) et on écrit $x\mathcal{R}y$.*

Exemple 6.1.2 *Soient $E = \{a,b,c,d,e\}$ et soit*

$$\mathcal{G} = \{(a,a),(b,e),(e,b),(c,d),(d,b)\} \subset E \times E$$

On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$\forall x,y \in E,\ x\mathcal{R}y \iff (x,y) \in \mathcal{G}$$

Dans ce cas simple, on peut faire la liste des relations entre éléments. $a\mathcal{R}a$, $b\mathcal{R}e$, $e\mathcal{R}b$, $c\mathcal{R}d$, $d\mathcal{R}b$.

Certaines relations binaires satisfont des propriétés particulières.

Définition 6.1.3 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.*

- *On dit que $\mathcal{R}$ est* **réflexive** *si*

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$$

- *On dit que $\mathcal{R}$ est* **symétrique** *si*

$$\forall x,y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

- *On dit que* $\mathcal{R}$ *est* **antisymétrique** *si*

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

- *On dit que* $\mathcal{R}$ *est* **transitive** *si*

$$\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$$

Définition 6.1.4 *Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une* **relation d'équivalence** *si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Les relations d'équivalence sont très importantes en mathématiques. Nous nous intéresserons plutôt à d'autres relations binaires : les relations d'ordre. Le paragraphe suivant est consacré à ces relations d'ordre.

6.2 Relations d'ordre

Définition 6.2.1
1. *Une relation binaire* $\preceq$ *sur un ensemble* E *est une* **relation d'ordre** *si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*
2. *un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné.*
3. *Une relation d'ordre* $\preceq$ *sur* E *est appelée relation d'ordre* **total** *si pour tout* $(x, y) \in E \times E$, $x \preceq y$ *ou* $y \preceq x$.
4. *une relation d'ordre* **partiel** *est une relation d'ordre qui n'est pas une relation d'ordre total.*

Exemple 6.2.2 *La relation d'ordre usuelle sur* $\mathbb{Z}$ *est une relation d'ordre total.*

Remarque 6.2.3 *Pour illustrer l'intérêt des relations d'ordre, citons l'exemple suivant.*

Soit E *un ensemble fini totalement ordonné, écrit sous forme de liste. Si l'on veut déterminer si un élément se trouve dans cet ensemble, on peut comparer cet élément avec chacun des éléments de l'ensemble, en parcourant la liste du début jusqu'à trouver l'élément, ou jusqu'à la fin s'il n'y est pas.*

Si la liste donne les éléments de E *dans l'ordre croissant (ou décroissant), alors il existe des algorithmes plus rapides.*

Exercice 6.2.4
1. *Soit* E *un ensemble. Montrer que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *des parties de* E.
2. *Montrer que si* $Card(E) \geq 2$, *alors c'est une relation d'ordre partiel.*

Exercice 6.2.5 *Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}$. *Est-ce un ordre total ou partiel ?*

6.3 Éléments remarquables dans un ensemble ordonné

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. Il s'agit ici de rappeler le vocabulaire lié à la position d'un élément par rapport à un ensemble : plus grand, plus petit élément, élément maximal, minimal, majorant, minorant.

Définition 6.3.1

1. *Un élément m de E est dit* **plus petit élément** *de E si*

$$\forall x \in E,\ m \leq x$$

2. *Un élément M de E est dit* **plus grand élément** *de E si*

$$\forall x \in E,\ x \leq M$$

Un plus petit (resp. plus grand élément) n'existe pas toujours. Mais s'il existe, il est unique.

Proposition 6.3.2

1. *Si m est plus petit élément de E, alors il est le seul plus petit élément de E. Il est aussi appelé minimum de E et noté* $\min(E)$*.*
2. *Si M est plus grand élément de E, alors il est le seul plus grand élément de E. Il est aussi appelé maximum de E et noté* $\max(E)$*.*

Exercice 6.3.3 *Justifier cette proposition.*

Exercice 6.3.4 *Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'inclusion. $\mathcal{P}(E)$ a-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?*

Exercice 6.3.5 *Soit $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre de divisibilité : $x|y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.*

1. *Montrer que $\mathbb{N}$ a un plus petit et un plus grand élément.*
2. *Montrer que* $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ *a un plus petit élément mais pas de plus grand élément.*
3. *Montrer que* $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *n'a ni plus petit, ni plus grand élément.*

On a vu que $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre $\leq$ possède la propriété suivante.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On dit que $\mathbb{N}$ est bien ordonnée, ou que $\leq$ est un bon ordre sur $\mathbb{N}$. C'est la définition suivante.

Définition 6.3.6 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$. On dit que E est bien ordonné si toute partie non vide de E admet un plus petit élément. Dans ce cas, on dit aussi que $\preceq$ est un bon ordre sur E.*

Exemples 6.3.7

1. *Pour l'ordre $\leq$ usuel, ni $\mathbb{Z}$, ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$ ne sont bien ordonnés.*

2. *La relation de divisibilité n'est pas un bon ordre pour $\mathbb{N}$.*

Remarque 6.3.8 *Cette notion d'ensemble bien ordonné est importante car ce sont les ensembles qui vérifient le principe de récurrence. Comme dans ce cours, nous ne faisons que des récurrences sur $\mathbb{N}$ muni de sa relation d'ordre naturelle, nous ne développerons pas cette notion d'ensemble bien ordonné plus avant.*

Définition 6.3.9 *Soit E un ensemble muni d'un ordre $\leq$ et soit A une partie de E.*

- *On dit qu'un élément M de E est un* **majorant de** *A si pour tout x dans A, $x \leq M$. On dit que A est* **majorée** *si elle admet au moins un majorant.*

- *On dit qu'un élément m de E est un* **minorant de** *A si pour tout x dans A, $m \leq x$. On dit que A est* **minorée** *si elle admet au moins un minorant.*

6.4 Ordre lexicographique sur un produit cartésien

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total $\preceq$. Soient a et b deux éléments de E. On dit que $a \prec b$ si $a \neq b$ et $a \preceq b$. On considère $E^n = E \times \cdots \times E$ le produit cartésien de n copies de E.

On définit l'ordre lexicographique $\preceq_{\text{lex}}$ sur E^n de la manière suivante.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments distincts de E^n. Alors l'ensemble $\{i \in [[1, n]] \ : \ x_i \neq y_i\}$ est non vide. Soit $m = \min\{i \ : \ x_i \neq y_i\}$. C'est le plus petit indice i tel que $x_i \neq y_i$. On dit que $x \prec_{\text{lex}} y$ si $x_m \prec y_m$.

Soient maintenant $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments quelconques de E^n. On dit que $x \preceq_{\text{lex}} y$ si ($x = y$ ou $x \prec_{\text{lex}} y$).

Proposition 6.4.1 *La relation $\preceq_{lex}$ est une relation d'ordre total sur E^n.*

Exercice 6.4.2 *Nous allons démontrer la proposition précédente.*

1. *Montrer que la relation $\preceq_{lex}$ est réflexive.*

2. *Nous voulons montrer que $\preceq_{lex}$ est antisymétrique. Soient donc x et y deux éléments de E tels que $x \preceq_{lex} y$ et $y \preceq_{lex} x$. Montrer que $x = y$ (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).*

3. *Nous voulons montrer que $\preceq_{lex}$ est transitive. Soient donc x y et z trois éléments de E tels que $x \preceq_{lex} y$ et $y \preceq_{lex} z$.*

   a) *Vérifier que si $x = y$ ou $y = z$, alors $x \preceq_{lex} z$.*

   b) *On suppose maintenant que $x \neq y$ et $y \neq z$. On pose*

   $$x = (x_1, \ldots, x_n) \ , \ y = (y_1, \ldots, y_n) \ , \ z = (z_1, \ldots, z_n)$$

   Soient $m_1 = \min\{i, \ x_i \neq y_i\}$ et $m_2 = \min\{i, \ y_i \neq z_i\}$.

   c) *Montrer que pour tout $i < \min(m_1, m_2)$, $x_i = z_i$.*

d) Montrer que $x \preceq_{lex} z$ (on distinguera les cas $m_1 = m_2$ et $m_1 \neq m_2$).

4. Les questions précédentes montrent que $\preceq_{lex}$ est une relation d'ordre sur E. Montrer que c'est un ordre total.

Exercice 6.4.3 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total $\preceq$. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'ordre lexicographique $\preceq_n$ sur E^n.*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de E^n.

1. *Montrer que si $(x_1, \dots, x_{n-1}) \preceq_{n-1} (y_1, \dots, y_{n-1})$ et $x_n \preceq y_n$, alors $x \preceq_n y$.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Remarque 6.4.4 *On peut montrer que si $\preceq$ est un bon ordre sur E, alors $\preceq_{lex}$ est un bon ordre sur E^n.*

6.5 Ordre lexicographique sur les mots

Soit E un ensemble muni d'une relation ordre total. Soient $x = x_1, \dots x_k$ et $y = y_1 \dots y_l$ deux mots de E^* (l'ensemble des mots dont E est l'alphabet). Donc ici, la longueur de x est k et celle de y est l. Soit m le plus petit des entiers k et l. On définit l'ordre lexicographique comme celui utilisé dans un dictionnaire. On dit que $x \prec_{\text{dico}} y$ si

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_m) \prec_{\text{lex}} (y_1, \dots, y_m) \text{ pour l'ordre lexicographique } \prec_{\text{lex}} \text{ sur } E^m \\ \text{ou} \\ (x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_m) \text{ et } k < l \end{cases}$$

On dit que $x \preceq_{\text{dico}} y$ si ($x = y$ ou $x \prec_{\text{dico}} y$).

Remarquons que pour tout mot x non vide de E^*, $\varepsilon \prec x$.

Proposition 6.5.1 *La relation $\preceq_{dico}$ ainsi définie est une relation d'ordre total.*

Exercice 6.5.2 *Soit $E = \{a, b\}$ muni de la relation $\leq$ telle que $a < b$. Soit $\preceq$ l'ordre lexicographique sur E obtenu à partir de $\leq$. Classer les mots suivants dans l'ordre croissant. aaa, ba, abba, baba.*

Exercice 6.5.3 *Soit $E = \{a, b, \dots, z\}$ l'alphabet latin, muni de la relation $\leq$ telle que $a < b < \cdots < z$. Soit $\preceq$ l'ordre lexicographique sur E obtenu à partir de $\leq$. Classer les mots suivants dans l'ordre croissant. "pierre", "part", "partition", "rage".*

Remarque 6.5.4 *Soit $\mathbb{N}$ muni de sa relation d'ordre usuelle $\leq$. Cette relation d'ordre induit une relation d'ordre $\leq_{dico}$ sur l'ensemble des mots dont $\mathbb{N}$ est l'alphabet. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = (1)$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} =$*

$0u_n$ le concaténé de (0) et de u_n. Alors $u_1 = (1)$, $u_2 = (0, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$, $u_4 = (0, 0, 0, 1)$, etc. Alors la suite u_n est une suite strictement décroissante. Ainsi, l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc $\leq_{dico}$ n'est pas un bon ordre sur l'ensemble des mots dont l'alphabet est $\mathbb{N}$.

6.6 Ordre lexicographique sur les mots tenant compte de la longueur

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total $\preceq$.

On définit un autre ordre lexicographique $\preceq_{\text{lex}*}$ sur E^* de la manière suivante

Soient $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments distincts de E^*, de longueurs respectives m et n. On dit que $x \prec_{\text{lex}*} y$ si $m < n$ ou si $m = n$ et $x \prec_{\text{lex}} y$ pour l'ordre lexicographique dans E^n.

On dit que $x \preceq_{\text{lex}*} y$ si ($x = y$ ou $x \prec_{\text{lex}} y$).

Proposition 6.6.1 *L'ordre $\preceq_{lex*}$ ainsi défini est une relation d'ordre total sur E^*.*

Exercice 6.6.2 *Reprendre les exercices 6.5.2 et 6.5.3 avec la relation d'ordre $\preceq_{lex*}$.*

Remarque 6.6.3 *On peut montrer que si $\preceq$ est un bon ordre sur E, alors $\preceq_{lex*}$ est un bon ordre sur E^*.*

7 Arithmétique

7.1 Structure de $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$.

L'addition $+$ vérifie les propriétés suivantes.

1. L'addition est une loi de composition interne :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ a + b \in \mathbb{Z}$$

2. L'addition est associative :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3,\ (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. 0 est un élément neutre pour l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ a + 0 = 0 + a = a$$

4. Tout élément de $\mathbb{Z}$ admet un opposé pour l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ a + (-a) = (-a) + a = 0$$

On résume les propriétés 1 à 4 en disant que $\mathbb{Z}$ est un groupe pour l'addition.

L'addition a encore une propriété importante.

5. l'addition est commutative :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a+b=b+a$$

On dit que $\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif (ou abélien) pour l'addition.

La multiplication $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes.

1. La multiplication est une loi de composition interne :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

2. La multiplication est associative :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3,\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

3. 1 est un élément neutre pour la multiplication :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$$

4. La multiplication est distributive sur l'addition :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3,\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

   À noter l'ordre des opérations : $a\cdot b + a\cdot c = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ (en l'absence de parenthèses, les multiplications se font avant les additions).

On dit que $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de lamultiplication est un anneau.

Notation. Pour la multiplication, on omet souvent le $\cdot$: on note souvent ab pour $a\cdot b$.

7.2 Division euclidienne

Théorème 7.2.1 *Pour tout couple d'entiers naturels (a,b), où $b \neq 0$, il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Les entiers q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Preuve.

Montrons d'abord l'existence de (q, r). Soit

$$E = \{p \in \mathbb{N}, bp \leq a\}$$

Comme $0 \in E$, cet ensemble est une partie non vide. Pour tout élément p de E, $p \leq bp \leq a$, donc E est majoré par a. Donc E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Il admet donc un plus grand élément qu'on notre q. On pose alors $r = a - bq$, qui est positif ou nul puisque $q \in E$ et donc $bq \leq a$.

Montrons que $r < b$. Supposons par l'absurde que $r \geq b$. Alors $r - b \geq 0$, donc $a - bq - b \geq 0$, donc $a - (q+1)b \geq 0$, ce qui signifie que $a \geq (q+1)b$, donc $(q+1)q \in E$, ce qui contredit le fait que b est le plus grand élément de E.

Reste à montrer l'unicité. Soient q' et r' deux entiers naturels tels que

$$\begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$$

Montrons que $q = q'$ et $r = r'$. De l'égalité $a = bq' + r'$, on tire $bq' = a - r' \leq a$, donc $q' \in E$. Comme $q = \max(E)$, on en déduit que $q' \leq q$.

Montrons que $q' = q$. Supposons par l'absurde que $q \neq q'$. Alors $q' < q$, donc $q' \leq q - 1$ puisque ce sont des entiers. On aurait alors

$$r' = a - bq' \geq a - bq + b = r + b \geq b$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que $q = q'$ et donc $r = r'$. $\square$

7.3 Représentation des entiers en binaire

Proposition 7.3.1 *Soit n un entier naturel non nul. Alors on peut écrire n de façon unique sous la forme*

$$n = \sum_{i=0}^{s} n_i 2^i$$

où r est un entier naturel, où pour tout $i \in [[0, s]]$, $n_i \in \{0, 1\}$ et où $n_s = 1$.

On écrira $[n_0, \ldots, n_s]$ sous forme de liste l'écriture binaire de n (on peut aussi le noter $\overline{n_r n_{r-1} \ldots n_0}_2$). L'écriture binaire de 0 est $[0]$.

Exercice 7.3.2 *Quelle est l'écriture binaire de 21 ?*

Exercice 7.3.3 *Montrer la proposition précédente par récurrence sur n.*

Proposition 7.3.4 *La taille $t(n)$ de n est le nombre de chiffres dans l'écriture binaire de n : $t(0) = 1$ et si $n \neq 0$,*

$$t(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Exercice 7.3.5 *Montrons la proposition précédente.*

Si $t(n) = t$, alors on peut écrire n sous la forme $n = \sum_{i=0}^{t-1} n_i 2^i$ où $n_{t-1} = 1$.

1. *Montrer que*
$$2^{t-1} \leq n \leq 2^t - 1$$

2. *En déduire que* $t = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

8 Encore d'autres exercices

8.1 Ensembles

Exercice 8.1.1 *Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que*

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$$

Exercice 8.1.2 *Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que*

$$(C \subset A \text{ et } C \subset B) \implies C \subset A \cap B$$

Exercice 8.1.3 *Soient A et B deux ensembles. Montrer que* $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

8.2 Applications

Exercice 8.2.1 *Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1$$

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 8.2.2 *Soit f l'application de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ telle que pour tout x dans $[1, +\infty[$, $f(x) = x^2 + 1$. L'application f est-elle bijective ?*

Exercice 8.2.3 *Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Donner l'application inverse des applications bijectives.*

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.

2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = x + 1$.

3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (x + y, x - y)$.

4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 8.2.4 *Soient A, B et C trois ensembles. Soient f une application de A dans B et g une application de B dans A.*

1. *Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*

2. *Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*

8.3 Relations binaires

Exercice 8.3.1 *Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si f et g sont deux éléments de E, on dit que $f\mathcal{R}g$ si $f(0) \leq g(0)$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?*

2. *Même question avec la relation $\mathcal{S}$ définie par :*

$$\forall f \in E,\ \forall g \in E,\ f\mathcal{S}g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$$

Exercice 8.3.2

1. *Soient A et B deux éléments de $E = \mathbb{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$, on dit que $A \preceq B$ si*

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq B$$

Cette relation $\preceq$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

2. *Même question si on redéfinit $\preceq$ de la manière suivante.*

$$A \preceq B \iff (A = B) \text{ ou } \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq B$$

3. *Que se passe-t-il si $E = \mathbb{P}(\mathbb{Z})$?*

8.4 Sommes et suites

Exercice 8.4.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{i=0}^{N} u_n \leq \sum_{i=0}^{N} v_n$$

Exercice 8.4.2

1. *Que vaut la somme des 10 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3 ?*

2. *Que vaut la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 4 et de raison 3 ?*

Exercice 8.4.3 *Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \geq 2,\ u_n = 4u_n - u_{n-1}$$

1. *Montrer que pour tout n,*

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

2. *Soit N un entier naturel. Calculer $\sum_{n=1}^{N} u_n$.*

Revoyons l'exercice suivant (déjà traité).

Exercice 8.4.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit*

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. *Calculer S_1 et S_2.*
2. *Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.*
3. *Soit k un entier naturel non nul. Exprimer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ comme une fraction (en mettant ces fractions sous le même dénominateur).*
4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 8.4.5

1. *Soit n un entier naturel. Simplifier l'expression*

$$(n+1)! - n!$$

2. *Soit n un entier naturel. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$ sans signe $\sum$ (ni points de suspension).*

Exercice 8.4.6

1. *Mettre au même dénominateur l'expression suivante.*

$$\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$$

2. *Exprimer la somme suivante sans signe $\sum$.*

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^3 - n}$$

8.5 Représentations en binaire ou en d'autres bases

Exercice 8.5.1 *Soit b un entier supérieur strictement à 1. Soit n un entier naturel non nul. On dit que $n_{t-1} \ldots n_1 n_0$ est la représentation en base b de n si*

(i) $\forall i \in [[0, t-1]]$, $n_i \in [[0, b-1]]$

(ii) $n_{t-1} \neq 0$

(iii) $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} n_i b^i$

On admet que tout entier admet une représentation en base b unique.

1. *Si* $b = 2$, *la représentation en base* b *d'un entier est sa représentation binaire. Donner la représentation binaire de* 30.

2. *Prenons* $b = 4$. *Soit* n *l'entier dont la représentation en base* 4 *est* 123. *Quel est cet entier (en base* 10*) ?*

3. *Soit* n *l'entier dont la représentation en base* 10 *est* 54. *Écrire* n *en base* 4.

Exercice 8.5.2 1. *Soit* $r_{10}(n) = n_{t-1}...n_0$ *la représentation en base* 10 *de* n. *C'est-à-dire, pour tout* $i \in [[0, t-1]]$, $n_i \in [[0, 9]]$, $n_{t-1} \neq 0$ *et*

$$n = \sum_{i=0}^{t-1} n_i 10^i$$

L'entier t *est donc la taille de cette représentation.*

2. *Montrer que*

$$10^{t-1} \leq n \leq 10^t - 1$$

3. *En déduire que*

$$10^{t-1} \leq n < 10^t$$

4. *En déduire que* $t = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ *(où* $\lfloor x \rfloor$ *désigne la partie entière d'un réel* x*).*

Exercice 8.5.3 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *qui à* n *associe* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *(où* $\lfloor x \rfloor$*) désigne la partie entière de* x*). Soit* n *un entier naturel non nul. Soit* $b(n) = n_{t-1} \dots n_0$ *l'écriture binaire de* n.

1. *Écrire* n *en fonction des* n_i *en utilisant le signe* $\sum$.

2. *Rappeler la valeur de* t *en fonction de* n.

3. *Écrire* $f(n)$ *en binaire (en fonction des* n_i*).*

4. *On pose* $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *et pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 1, $f^n = f^{n-1} \circ f$. *Montrer que* $f^{t-1}(n) = 1$ *et donc que* $f^t(n) = 0$.

Exercice 8.5.4 *Soiten* E *un ensemble et* $\leq$ *une relation d'ordre total sur* E. *On considère la fonction suivante qui prend en entrées une liste croissante* l *d'éléments de* E *et un élément* x *de* E.

`Cherche`(l, x) *:*
  Si $l = []$, *sortir* `Non`
  $n = \text{taille}(l)$
  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
  Si $l[m] = x$, *sortir* `Oui`
  Sinon :

Si $l[m] > x$ *:* $l = [l[i]$ pour $i \in [[m+1, n-1]]$
Si $l[m] < x$ *:* $l = [l[i]$ pour $i \in [[0, m-1]]$
Sortir `Cherche`(l, x)

1. *Appliquer cette fonction à* $l = [0, 2, 3, 5]$ *et* $x = 4$*, puis à* $l = [0, 2, 3, 5]$ *et* $x = 3$*.*

2. *Que fait cette fonction ?*

3. *Soit* n *un entier naturel. On note* $C(n)$ *le nombre maximal de comparaisons que la fonction* `Cherche` *effectue pour une liste de taille* n*. Montrer que*
$$C(n) \leq 2 + C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

4. *Soit* t *la taille de l'écriture de* n *en binaire. Déduire de la question précédente et de l'exercice 8.5.3 que* $C(n) \leq 2t$*.*

5. *En déduire que* $C(n) \leq 2(\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)$*.*

6. *Voyez-vous un algorithme simple pour faire la même chose que* `Cherche`*, mais qui fonctionnerait aussi si la suite* l *n'est pas croissante ? Quel est l'intérêt de* `Cherche` *par rapport à cet algorithme ?*