	ANNEE UNIVERSITAIRE 2023/2024	
université de BORDEAUX	**Semestre 2 DST** **PARCOURS/ETAPE : Licence 1 Code UE : 4TPU289U** **Epreuve : Mathématiques pour l'informatique** **Date : 04/06/2024 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Matériel électronique autorisé : calculette de type collège	**Collège Sciences et technologies**

Toutes les réponses doivent être justifiées

Barème indicatif. Rédaction : 3 - Exercice 1 : 3 - Exercice 2 : 3 - Exercice 3 : 2 - Exercice 4 : 3 - Exercice 5 : 3 - Exercice 6 : 3

Exercice 1

Dans un jeu de hasard, on tire cinq boules de la manière suivante. Trois boules sont tirées sans remise parmi un ensemble de 20 boules rouges numérotées de 1 à 20, et deux boules sont tirées, toujours sans remise, parmi 10 boules bleues numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de tirages possibles pour ces cinq boules ?

Exercice 2

Dans chacun des exemples suivants, indiquer si l'application f_i est injective, surjective, bijective et justifier pourquoi.

Dans les cas où f_i est bijective, expliciter sa bijection réciproque.

1) f_1 est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $x - y$.
2) f_2 est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(x + y, x + 2y)$.

Exercice 3

Sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (x', y') \in \mathbb{R}^2 \ , \ (x, y)\ \mathcal{R}(x', y') \iff x + y \leq x' + y'$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.
2) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
3) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation symétrique.
4) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation antisymétrique.

Exercice 4

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les conditions suivantes.

$$u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \ , \ \forall n \geq 2, \ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

   a) Calculer u_n pour $n \in [[0, 7]]$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite de mots de $\{0, 1\}^*$ définie par les conditions suivantes.

$$U_1 = 1 \ , \ U_2 = 0 \ , \ \forall n \geq 2, \ U_n = U_{n-2}U_{n-1}U_{n-2}$$

c'est-à-dire que U_n est la concaténée de U_{n-2}, U_{n-1} et U_{n-2}.

a) Déterminer U_n pour $n \in [[1, 5]]$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|U_n| = u_n$ (on rappelle que $|U_n|$ est la longueur du mot U_n).

Exercice 5

Soit $r_3(n) = n_{t-1}...n_0$ la représentation en base 3 d'un entier naturel non nul n. C'est-à-dire, pour tout $i \in [[0, t-1]]$, $n_i \in \{0, 1, 2\}$, $n_{t-1} \neq 0$ et

$$n = \sum_{i=0}^{t-1} n_i 3^i$$

L'entier t est donc la taille de cette représentation.

1) Montrer que $3^{t-1} \leq n \leq 3^t - 1$.
2) En déduire que $3^{t-1} \leq n < 3^t$.
3) En déduire que $t = E(\log_3(n)) + 1$ (où $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x).

Exercice 6

Soient A, B, C trois ensembles.

1) Montrer que si $A \cup B \subset B \cap C$, alors $A \subset B$ et $B \subset C$.
2) La proposition suivante est-elle vraie ?

$$C \subset A \cup B \implies C \subset A \text{ ou } C \subset B$$

Justifier votre réponse.