	ANNEE UNIVERSITAIRE 2023/2024 **Semestre 2 DST** **PARCOURS/ETAPE : Licence 1 Code UE : 4TPU289U** **Epreuve : Mathématiques pour l'informatique** **Date : 04/06/2024 Heure : 14h30 Durée : 3h** Corrigé	**Collège Sciences et technologies**

Toutes les réponses doivent être justifiées

Barème indicatif. Rédaction : 3 - Exercice 1 : 3 - Exercice 2 : 3 - Exercice 3 : 2 - Exercice 4 : 3 - Exercice 5 : 3 - Exercice 6 : 3

Exercice 1

Dans un jeu de hasard, on tire cinq boules de la manière suivante. Trois boules sont tirées sans remise parmi un ensemble de 20 boules rouges numérotées de 1 à 20, et deux boules sont tirées, toujours sans remise, parmi 10 boules bleues numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de tirages possibles pour ces cinq boules ?

Correction. Soient R l'ensemble des tirages de boules rouges et B l'ensemble des tirages de boules bleues.

Alors $\mathrm{Card}(R)$ est le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à 20 éléments.

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(R) &= \binom{20}{3} \\ &= \frac{20!}{17! \times 3!} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18}{6} \\ &= 1140\end{aligned}$$

$\mathrm{Card}(B)$ est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 10 éléments.

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(R) &= \binom{10}{2} \\ &= \frac{10!}{8! \times 2!} \\ &= \frac{10 \times 9}{2} \\ &= 45\end{aligned}$$

Le nombre de tirage est le cardinal de $R \times B$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(R \times B) &= 1140 \times 45 \\ &= 51300\end{aligned}$$

Exercice 2

Dans chacun des exemples suivants, indiquer si l'application f_i est injective, surjective, bijective et justifier pourquoi.

Dans les cas où f_i est bijective, expliciter sa bijection réciproque.

1) f_1 est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $x-y$.
2) f_2 est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(x+y, x+2y)$.

Correction.

1) L'application f_1 n'est pas surjective car $f((0,0)=0$ et $f(1,1)=0$. Donc $f((0,0)=f(1,1)$ alors que $(0,0)\neq(1,1)$.

   L'application f_1 est surjective.
   En effet, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f_1(x,0)=x$.
   Donc tout élément x de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ admet au moins un antécedent dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$.
2) Montrons que f_2 est bijective.
   Pour cela, on considère (a,b) un élément de $\mathbb{R}^2$, et on montre qu'il existe un unique élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $f_2(x,y)=(a,b)$.

$$f_2(x,y)=(a,b) \iff \begin{cases} x+y=a \\ x+2y=b \end{cases}$$

   En remplaçant la ligne 2 par la ligne 2 moins la ligne 1, on voit que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y=a \\ \quad\; y=b-a \end{cases}$$

   En remplaçant y par sa valeur dans la ligne 1, on obtient que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x=2a-b \\ y=b-a \end{cases}$$

   Finalement $f_2(x,y)=(a,b)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x=2a-b \\ y=b-a \end{cases}$$

   Donc tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ a un unique antécédent dans $\mathbb{R}^2$. f_2 est donc bijective et son inverse f_2^{-1} est définie par

$$f_2^{-1}(a,b)=(2a-b, b-a)$$

Exercice 3

Sur $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } (x',y')\in\mathbb{R}^2 \ , \ (x,y)\ \mathcal{R}(x',y') \quad\iff\quad x+y\leq x'+y'$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.
2) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
3) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation symétrique.
4) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation antisymétrique.

Correction.

1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y \leq x + y$ donc $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$.
   On en déduit que $\mathcal{R}$ est réflexive.
2) Soient (x, y), (x', y') et (x'', y'') trois éléments de $\mathbb{R}^2$. Montrons que

$$((x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x'', y'')) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

   On suppose pour cela que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$. Donc $x+y \leq x'+y'$ et $x'+y' \leq x'' + y''$. Par transitivité de la relation $\leq$, on en déduit que $x + y \leq x'' + y''$, et donc que $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.
   On a donc montré que

$$((x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x'', y'')) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

   Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
3) La proposition $(0, 0)\mathcal{R}(1, 0)$ est vraie (puisque $0 + 0 \leq 1 + 0$) et la proposition $(1, 0)\mathcal{R}(0, 0)$ est fausse (puisque $1 + 0 > 0 + 0$). Donc la relation $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
4) On a les relations $(1, 0)\mathcal{R}(0, 1)$ (puisque $1+0 \leq 0+1$) et $(0, 1)\mathcal{R}(1, 0)$ (puisque $0+1 \leq 1+0$), mais $(1, 0) \neq (0, 1)$. On en déduit que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

Exercice 4

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les conditions suivantes.

$$u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \ , \ \forall n \geq 2, \ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

   a) Calculer u_n pour $n \in [[0, 7]]$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite de mots de $\{0, 1\}^*$ définie par les conditions suivantes.

$$U_1 = 1 \ , \ U_2 = 0 \ , \ \forall n \geq 2, \ U_n = U_{n-2}U_{n-1}U_{n-2}$$

   c'est-à-dire que U_n est la concaténée de U_{n-2}, U_{n-1} et U_{n-2}.
   a) Déterminer U_n pour $n \in [[1, 5]]$.
   b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|U_n| = u_n$ (on rappelle que $|U_n|$ est la longueur du mot U_n).

Correction.

1) a) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 11$, $u_6 = 21$, $u_7 = 43$.
   b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

   Initialisation.
   $\frac{1}{3}\left(2^0 - (-1)^0\right) = 0$, donc on a bien $u_0 = \frac{1}{3}\left(2^0 - (-1)^0\right)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\frac{1}{3}\left(2^1-(-1)^1\right)=1$, donc on a bien $u_1=\frac{1}{3}\left(2^1-(-1)^1\right)$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité.
Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1}+2u_{n-2}\\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)+\frac{2}{3}\left(2^{n-2}-(-1)^{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n-1}+2^{n-1}+(-1)^n-2(-1)^n\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, on a utilisé le fait que $u_{n-1}=\frac{1}{3}\left(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)$ puisque $\mathcal{P}(n-1)$ est supposée vraie et le fait que $u_{n-2}=\frac{1}{3}\left(2^{n-2}-(-1)^{n-2}\right)$ puisque $\mathcal{P}(n-2)$ est aussi supposée vraie.
On a donc bien montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Conclusion. On a montré que pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)$$

a) $U_1=1$, $U_2=0$, $U_3=101$, $U_4=01010$, $U_5=10101010101$.
b) Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{Q}(n)$ la propriété :

$$|U_n|=u_n$$

Initialisation.
$U_1=1$, donc $|U_1|=1$ et alors $|U_1|=u_1$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
$U_2=1$, donc $|U_2|=1$ et alors $|U_2|=u_2$ donc $\mathcal{Q}(2)$ est vraie.
Hérédité.
Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On suppose que $\mathcal{Q}(n-1)$ et $\mathcal{Q}(n-2)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Comme $U_n=U_{n-2}U_{n-1}U_{n-2}$, et comme $|U_{n-1}|=u_{n-1}$ et $|U_{n-2}|=u_{n-2}$,

$$\begin{aligned}
|U_n| &= |U_{n-1}|+2|U_{n-2}|\\
&= u_{n-1}+2u_{n-2}\\
&= u_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
Conclusion. On a montré que pour tout entier naturel n non nul,

$$|U_n|=u_n$$

Exercice 5

Soit $r_3(n)=n_{t-1}...n_0$ la représentation en base 3 d'un entier naturel non nul n. C'est-à-dire, pour tout $i \in [[0,t-1]]$, $n_i \in \{0,1,2\}$, $n_{t-1} \neq 0$ et

$$n=\sum_{i=0}^{t-1} n_i 3^i$$

L'entier t est donc la taille de cette représentation.

1) Montrer que $3^{t-1} \leq n \leq 3^t - 1$.
2) En déduire que $3^{t-1} \leq n < 3^t$.
3) En déduire que $t = E(\log_3(n)) + 1$ (où $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x).

Correction.

1) D'après la donnée de la décomposition en base 3 de n

$$n = \sum_{i=0}^{t-1} n_i 3^i$$

Or pour tout $i \in [[0, t-2]]$, $0 \leq n_i \leq 2$, donc $0 \leq n_i 3^i \leq 2 \cdot 3^i$. De plus, comme $n_{t-1} \neq 0$, $1 \leq n_{t-1} \leq 2$ donc $3^{t-1} \leq n_{t-1} 3^{t-1} \leq 2 \cdot 3^{t-1}$.
En sommant ces inégalités,

$$3^{t-1} \leq \sum_{i=0}^{t-1} n_i 3^i \leq \sum_{i=0}^{t-1} 2 \cdot 3^i$$

donc

$$3^{t-1} \leq n \leq 2 \sum_{i=0}^{t-1} 3^i$$

Comme

$$\sum_{i=0}^{t-1} 3^i = \frac{3^t - 1}{2}$$

on obtient

$$3^{t-1} \leq n \leq 3^t - 1$$

2) Comme $3^t - 1 < 3^t$, la question précédente montre que

$$3^{t-1} \leq n < 3^t$$

3) Comme la fonction $\log_3$ est strictement croissante, on a donc

$$\log_3(3^{t-1}) \leq \log_3(n) < \log_3(3^t)$$

c'est-à-dire

$$t - 1 \leq \log_3(n) < t$$

Comme t est un entier, cela montre que $t - 1 = E(\log_3(n))$, c'est-à-dire

$$t = E(\log_3(n)) + 1$$

Exercice 6

Soient A, B, C trois ensembles.

1) Montrer que si $A \cup B \subset B \cap C$, alors $A \subset B$ et $B \subset C$.
2) La proposition suivante est-elle vraie ?

$$C \subset A \cup B \implies C \subset A \text{ ou } C \subset B$$

Justifier votre réponse.

Correction.

1) On suppose que $A \cup B \subset B \cap C$.

   Montrons que $A \subset B$.
   Soit a un élément de A. Alors $a \in A \cup B$. Comme $A \cup B \subset B \cap C$, on en déduit que $a \in B \cap C$. Donc $a \in B$.
   On a bien montré que $A \subset B$.

   Montrons que $B \subset C$.
   Soit b un élément de B. Alors $b \in A \cup B$. Comme $A \cup B \subset B \cap C$, on en déduit que $b \in B \cap C$. Donc $b \in C$
   On a bien montré que $B \subset C$.

2) Cette proposition n'est pas toujours vraie. En effet, si $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0, 1\}$, alors $C \subset A \cup B$, mais $C \not\subset A$ et $C \not\subset B$. Donc

$$C \subset A \cup B \text{ et non}(C \subset A \text{ ou } C \subset B)$$

   est vraie, donc la proposition "$C \subset A \cup B \implies (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$" est fausse.