

[1] Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour l'addition des matrices ? Pour la multiplication des matrices ?

L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ est-il un groupe pour l'addition des matrices ? Pour la multiplication ?

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour l'addition ? Pour la multiplication ?

Soit E un ensemble non vide. L'ensemble des applications de E dans E muni de la composition est-il un groupe ? L'ensemble $S(E)$ des bijections de E dans E muni de la composition est-il un groupe ? Si E est un ensemble fini à n éléments. Quel est le cardinal de $S(E)$?

[2] Donner toutes les tables possibles pour les groupes d'ordre 2, 3 et 4. Donner, à isomorphisme près, la liste des groupes d'ordre inférieur ou égal à 4.

[3] Soit S_n le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, muni de la composition. Montrer que S_n est abélien si et seulement si $n \leq 2$.

[4] Soient G un groupe, et H, K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

[5] Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G . On pose :

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\} \quad \text{et} \quad KH = \{kh : h \in H, k \in K\}.$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. Montrer que dans ce cas, $HK = \langle H \cup K \rangle$.

[6] Soit $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. L'ensemble U est-il un sous-groupe de $\mathbb{C}$ pour la multiplication ?

L'application de $\mathbb{R}$ dans U qui à t associe e^{it} définit elle un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(U, *)$? Est-ce un isomorphisme de groupes ?

L'application de U dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui à z associe la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix}$$

définit-elle un homomorphisme de groupes ? Quels sont son noyau et son image ?

L'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $\log t$ définit-elle un homomorphisme de groupes ? Est-ce un isomorphisme de groupes ?

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. L'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à n associe $an + b$ est-il un homomorphisme de groupes ?

[7] Soient G, G_1 et G_2 trois groupes. Montrer que G est isomorphe à $G_1 \times G_2$ si et seulement si il existe deux sous groupes H_1 et H_2 de G tels que :

1. $H_i \simeq G_i$ pour $i = 1$ et 2 .
2. Quelque soit h_1 dans H_1 et h_2 dans H_2 , $h_1 h_2 = h_2 h_1$.
3. $G = H_1 H_2$.
4. $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.