

- [1] Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
- [2] Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique.
- [3] Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Soit g un générateur de G .
1. Soit d un diviseur de n . Montrer que $H_d = \{g^{kn/d} : k \in \{0, \dots, d-1\}\}$ est un sous groupe d'ordre d de G .
 2. Soit H un sous-groupe de G . Soit d l'ordre de H . d est-il un diviseur de n ? Montrer que $H = H_d$.
- [4] Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il fini ? Si oui, quel est son ordre ? Est-il monogène ? Est-il cyclique ? Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- [5] Soit G un groupe, d'élément neutre e . On suppose que pour tout élément g de G , $g^2 = e$.
1. Montrer que G est abélien.
 2. On suppose G fini. Montrer qu'il existe un entiers n et un ensemble de sous-groupes $\{H_i : i \in \{0, \dots, n\}\}$ de G , tels que pour $0 \leq i \leq n$, le cardinal de H_i est 2^i , pour $0 \leq i \leq n-1$, $H_i \subset H_{i+1}$ et $G = H_n$. En déduire que G est d'ordre 2^n .
 3. Montrer que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.
- [6] Soit G un groupe d'ordre 4.
1. Montrer que si dans G , il existe un élément d'ordre 4, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
 2. Sinon, montrer que pour tout g dans G , $g^2 = e$. En déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- [7] Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
- [8] Soient G et H deux groupes d'ordre 2. Décrire $\text{Hom}(G, H)$. même question si $|G| = p$ et $|H| = q$, où p et q sont premiers entre eux.
- [9] Dans le plan euclidien, soit $\mathcal{T}$ un triangle équilatéral. Soit G l'ensemble des isométries u du plan telles que $u(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
1. Montrer que G est un groupe.
 2. Montrer qu'il existe deux éléments r et s dans G tels que $G = \langle r, s \rangle$, $s^2 = \text{Id}$, $r^3 = \text{Id}$ et $s^{-1} \circ r \circ s = r^{-1}$.
- [10] Soit G un groupe d'ordre 6.
1. Montrer que s'il existe un élément d'ordre 6 dans G , alors G est cyclique.
 2. On suppose que G n'est pas cyclique.
- a) Montrer qu'il existe un élément g d'ordre 3 dans G .
 - b) Soit $t \in G \setminus \langle g \rangle$. Montrer que l'application de $\langle g \rangle \times \langle t \rangle$ dans G qui à (x, y) associe xy est injective. En déduire que t est d'ordre 2, et que $G = \langle t, g \rangle$. Montrer que $t^{-1}gt = tgt = g^{-1}$.
 - c) Montrer que G est isomorphe au groupe des isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant.