Université de Bordeaux — **MHT812 – Master**
Mathématiques — Année 2015–2016

FEUILLE D'EXERCICES n° 14
Bases de Gröbner

Exercice 1 – On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x^2+y+z=1 \\ x+y^2+z=1 \\ x+y+z^2=1 \end{cases}$$

Soient $f_1 = x^2+y+z-1$, $f_2 = x+y^2+z-1$ et $f_3 = x^+y+z^2-1$. Soit $I =< f_1, f_2, f_3 >$. On munit $\mathbb{Q}[x,y,z]$ de l'ordre lexicographique $\prec = \prec_{\text{lex}}$ tel que $x \succ y \succ z$. La base de Gröbner réduite de I est alors $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$$\begin{aligned} g_1 &= x+y+z^2-1 \\ g_2 &= y^2-y-z^2+z \\ g_3 &= yz^2+z^4/2-z^2/2 \\ g_4 &= z^6-4z^4+4z^3-z^2 = z^2(z-1)^2(z^2+2z-1) \end{aligned}$$

Résoudre le système $(\mathcal{S})$.

Exercice 2 – On considère $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ muni de l'ordre lexicographique $\prec$ tel que

$$X_1 \succ X_2 \succ \cdots \succ X_n.$$

Soit I un idéal de R. Pour tout $l \in [1,n]$, on note $I_l = K[X_{l+1}, \ldots, X_n] \cap I$.

1) Montrer que I_l est un idéal de $K[X_{l+1}, \ldots, X_n]$

On veut démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit G une base de Gröbner de I. Alors $G_l = K[X_{l+1}, \ldots, X_n] \cap G$ est une base de Gröbner de I_l.*

2) Soit $f \in I_l$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{lt}(g)$ divise $\mathrm{lt}(f)$. Montrer alors que $\mathrm{lt}(g) \in K[X_{l+1}, \ldots, X_n]$. Montrer enfin que $g \in G_l$.

3) En déduire que $< \mathrm{lt}(I_l) > \subset < \mathrm{lt}(G_l) >$.

4) Terminer la démonstration du théorème.