FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Travail sur machine

FFT

Exercice 1 – [FFT]
Soit n une puissance de 2 différente de 1 : $n = 2^k$ avec $k > 0$. Soit ω une racine primitive n-ième de l'unité, par exemple $\omega = e^{2i\pi/n}$. On rappelle que si R est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $< n$, que l'on identifiera au n-uplet $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ on a

$$DFT_\omega(R) = (R(1), R(\omega), \ldots, R(\omega^{n-1}))$$

et que pour évaluer $DFT_\omega(R)$ on peut se ramener au calcul de deux DFT de degrés $< m = n/2$ par le biais des formules

$$\begin{cases} R(\omega^p) & = \sum_{j=0}^{m-1} R_{2j}\alpha^{jp} + \omega^p \sum_{j=0}^{m-1} R_{2j+1}\alpha^{jp} \\ R(\omega^{p+m}) & = \sum_{j=0}^{m-1} R_{2j}\alpha^{jp} - \omega^p \sum_{j=0}^{m-1} R_{2j+1}\alpha^{jp}. \end{cases}$$

où $0 \leqslant p < m$ et où $\alpha = \omega^2$.

Rédiger l'algorithme récursif s'appuyant sur cette remarque. La procédure dite `FFT` recevra en entrées R, ω et n, et retournera $DFT_\omega(R)$. On prendra garde à ne pas calculer ω^p à chaque étape de la boucle sur p. Pour cela, on pourra les stocker en amont dans une liste.

Exercice 2 – [Produit rapide de polynômes par FFT]
Ici encore $n = 2^k$ avec $k > 0$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $\deg(PQ) < n$ (on pourra imposer que $\deg P, \deg Q < n/2$). On identifiera encore P et Q aux n-uplets $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ et $(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$. On rappelle que l'on a alors

$$DFT_\omega(PQ) = DFT_\omega(P) \cdot DFT_\omega(Q)\,[1],$$

et que pour tout polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ de degré $< n$ on a

$$DFT_{\omega^{-1}}(DFT_\omega(R)) = DFT_\omega(DFT_{\omega^{-1}}(R)) = nR.$$

Écrire une procédure prenant en arguments P, Q et n et retournant PQ, procédure qui prendra bien sûr appui sur la procédure `FFT` de l'exercice 1.

Expérimenter cette fonction sur des polynômes pris au hasard.

1. ici $(u_i)_{0\leqslant i<n} \cdot (v_i)_{0\leqslant i<n} = (u_i v_i)_{0\leqslant i<n}$.