Université Bordeaux 1
Mathématiques

N1MA8W02 – Master
Année 2018–2019

Devoir Surveillé, 6 mars 2019

Durée 1h30.

À la fin de l'épreuve, votre fichier "`votre_nomDS.sage`" ou "`votre_nomDS.sws`" est à envoyer à l'adresse : `arnaud.jehanne@u-bordeaux.fr`

Exercice 1 – [Interpolation d'Hermite]
On rappelle que si P est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré d, pour tout $a \in \mathbb{Q}$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$$

On cherche à trouver le polynôme P de $\mathbb{Q}[x]$ de degré minimal tel que $P(1) = -2$, $P'(1) = -3$, $P''(1) = 4$, $P'''(1) = 24$, $P(2) = 2$ et $P'(2) = 17$.

1) Sur votre copie, traduire ces contraintes en termes de problème de restes chinois.

2) Résoudre le problème en utilisant sage (par exemple la commande `crt`). Sur votre copie ou votre fichier, écrire la commande utilisée et le résultat obtenu.

Exercice 2 – [Approximants de Padé]
On rappelle l'algorithme d'Euclide étendu appliqué à deux polynômes P et Q de $K[X]$ où K est un corps commutatif.

Algorithme 1. Algorithme d'Euclide étendu

Entrées: P, $Q \in K[X]$
Sorties: pgcd(P, Q) et A, $B \in K[X]$ tels que $AP + BQ =$pgcd(P, Q)
$A_0 \leftarrow 1$, $B_0 \leftarrow 0$, $R_0 \leftarrow P$
$A_1 \leftarrow 0$, $B_1 \leftarrow 1$, $R_1 \leftarrow Q$
$i \leftarrow 1$ $\{$*initialisations*$\}$
tantque $R_i \neq 0$ **faire**
  $(q, R_{i+1}) \leftarrow$ quotient et reste de la division de R_{i-1} par R_i
  $A_{i+1} \leftarrow A_{i-1} - qA_i$, $B_{i+1} \leftarrow B_{i-1} - qB_i$
  $i \leftarrow i + 1$
Retourner le dernier R_i non nul ainsi que les A_i et B_i correspondants

On rappelle aussi que pour tout $i \geqslant 0$, $A_iP + B_iQ = R_i$ et $\begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_{i+1} & B_{i+1} \end{vmatrix} = (-1)^i$.

1) On suppose que $\deg P \geqslant \deg Q$. Pour tout i, on note $n_i = \deg R_i$. Montrer que pour tout $i > 0$

$$\deg B_i = n_0 - n_{i-1}$$

Soit $F \in K[X] \setminus \{0\}$. On note $F = \sum_{i=0}^{N} f_i X^i$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, On appelle *approximant de Padé de type* (m,n) de F un élément $(U,V) \in K[X]^2$ vérifiant

$$\begin{cases} V \neq 0,\ \deg U \leqslant m \text{ et } \deg V \leqslant n \\ VF - U = WX^{m+n+1},\ \text{où } W \in K[X]. \end{cases}$$

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_k = \sum_{i=0}^{k} f_i X^i$ (où $f_i = 0$ si $i > N$). Dans l'algorithme 1 appliqué à (X^{m+n+1}, F_{m+n}), on note i le plus petit entier tel que $\deg R_i \leqslant m$. Montrer que (R_i, B_i) est un approximant de Padé de type (m,n) de F.

3) Soient (U_0, V_0) et (U,V) deux approximants de Padé de type (m,n) de F.

a) Montrer que $\deg \begin{vmatrix} V_0 & U_0 \\ V & U \end{vmatrix} \leqslant m+n$.

b) En déduire que si W_0 et W vérifient

$$\begin{cases} V_0 F_{m+n} - W_0 X^{m+n+1} = U_0 \\ \text{et } VF_{m+n} - WX^{m+n+1} = U \end{cases}$$

alors il existe $Z \in K(X)$ tel que $(U,V,W) = (U_0, V_0, W_0)Z$ (on pourra démontrer par l'absurde que les vecteurs (V_0, W_0) et (V,W) de $K(X)^2$ sont liés, en s'aidant éventuellement du rappel sur les systèmes de Cramer donné en fin d'énoncé).

c) Montrer que si (U_0, V_0) est égal au (R_i, B_i) de la question 2, alors $Z \in K[X]$.

4) En utilisant la méthode suggérée par la question 2, écrire une fonction `Pade` de complexité algébrique en $O((m+n+1)^2)$ qui étant donnés F, m et n calcule un approximant de Padé (U,V) de type (m,n) de F (si par exemple $F = X + X^2 + 3X^3 \in \mathbb{Q}[X]$, $m = 1$ et $n = 2$, on doit trouver un multiple de $(X, -2X^2 - X + 1)$).

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle d'éléments de K satisfaisant une relation de récurrence

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \cdots + a_k u_n \qquad (1)$$

où les a_i sont des éléments inconnus de K. On suppose connaître les $2k$ premiers termes de (u_n).

a) Soient pour $N \in \mathbb{N}$ les polynômes $A = 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i X^i$ et $F_N = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} u_i X^i$.
Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $\deg B \leqslant k-1$ et tel que pour tout N,

$$AF_N - B \equiv 0 \mod X^{N+1}$$

b) Soit (U,V) le résultat de `Pade`$(F_{2k-1}, k-1, k)$. Montrer que $V(0) \neq 0$.

c) Programmer une fonction `Recurrence` utilisant `Pade` qui étant donnée la liste $[u_0 \ldots, u_{2k-1}]$, rend une liste $[a_1, \ldots, a_k]$ vérifiant (1) (justifier votre réponse).

6) Essayer avec $k = 2$ et une suite d'entiers commençant par $(3,5,8,13)$, puis $k = 3$ et une suite d'entiers commençant par $(0,1,1,-2,4,1)$.

Quelques commandes sage.

On peut définir $\mathbb{Q}[x]$ par `Qx.<x>=PolynomialRing(QQ)`
Soient A et B sont deux polynômes de $\mathbb{Q}[x]$ tels que $B \neq 0$.
`A.quo_rem(B)` donne le quotient et le reste de la division de A par B.
`A % B` donne le reste de la division de A par B.
`A[i]` est le coefficient de x^i dans A.
`A.degree()` donne le degré de A.
Si u est une liste, `len(u)` donne la taille de u.

Rappel sur les systèmes de Cramer. Soit

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{2}$$

un système d'équations où a, b, c, d, e, f appartiennent à un corps commutatif L. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, le système (2) a une solution unique

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$