Université Bordeaux 1 **N1MA8W02 – Master**
Mathématiques Année 2018–2019

Devoir Surveillé, 6 mars 2019
Corrigé

Exercice 1 – [Interpolation d'Hermite]
On rappelle que si P est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré d, pour tout $a \in \mathbb{Q}$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

On cherche à trouver un polynôme P de $\mathbb{Q}[x]$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que $P(1) = -2$, $P'(1) = -3$, $P''(1) = 4$, $P'''(1) = 24$, $P(2) = 2$ et $P'(2) = 17$.

1) *Sur votre copie, traduire ces contraintes en termes de problème de restes chinois.*

Ces contraintes sont équivalentes au système de congruences suivant.

$$\begin{cases} P \equiv -2 - 3(x-1) + 4\dfrac{(x-1)^2}{2} + 24\dfrac{(x-1)^3}{6} \\ P \equiv 2 + 17(x-2) \end{cases}$$

2) *Résoudre le problème en utilisant sage (par exemple la commande `crt`). Sur votre copie ou votre fichier, écrire la commande utilisée et le résultat obtenu.*

Voir le fichier.

Exercice 2 – [Approximants de Padé]

On rappelle ici l'algorithme d'Euclide étendu appliqué à deux polynômes F et $G \in K[X]$ où K est un corps commutatif.

Algorithme 1. *Algorithme d'Euclide étendu*

Entrées: *P, $Q \in K[X]$*
Sorties: *pgcd(P,Q) et A, $B \in K[X]$ tels que $AP + BQ =$pgcd(P,Q)*

$A_0 \leftarrow 1$, $B_0 \leftarrow 0$, $R_0 \leftarrow P$
$A_1 \leftarrow 0$, $B_1 \leftarrow 1$, $R_1 \leftarrow Q$
$i \leftarrow 1$ {initialisations}
tantque $R_i \neq 0$ **faire**
  $(q, R_{i+1}) \leftarrow$ *quotient et reste de la division de* R_{i-1} *par* R_i
  $A_{i+1} \leftarrow A_{i-1} - qA_i$, $B_{i+1} \leftarrow B_{i-1} - qB_i$
  $i \leftarrow i+1$
Retourner le dernier R_i non nul ainsi que les A_i et B_i correspondants

---

On rappelle que pour tout $i \geqslant 0$, $A_iP + B_iQ = R_i$ et $\begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_{i+1} & B_{i+1} \end{vmatrix} = (-1)^i$.

1) *Pour tout i, on note $n_i = \deg R_i$. Montrer que pour tout $i > 0$*

$$\deg B_i = n_0 - n_{i-1}$$

On procède par récurrence.

$i = 1$: $\deg B_1 = \deg 1 = 0 = n_0 - n_0$.

$i = 2$: $B_2 = B_0 - q_1 B1 = -q1B$, donc $\deg B_2 = \deg q_1 = n_0 - n_1$ (puisque q_1 est le quotient de R_0 par R_1).

Soit $i \geqslant 2$. On suppose que pour $j \leqslant i$, $\deg B_j = n_0 - n_{j-1}$. $B_{i+1} = B_{i-1} - q_i B_i$. Comme $\deg B_{i-1} < \deg B_i$, à fortiori, $\deg B_{i-1} < \deg(q_i B_i)$ donc

$$\deg B_{i+1} = \deg(q_i B_i) = (n_{i-1} - n_i) + (n_0 - n_{i-1}) = n_0 - n_i$$

Soit $F \in K[X] \setminus \{0\}$. On note $F = \sum_{i=0}^{N} f_i X^i$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, On appelle approximant de Padé de type (m,n) de F un élément $(U,V) \in K[X]^2$ vérifiant

$$\begin{cases} V \neq 0,\ \deg U \leqslant m \text{ et } \deg V \leqslant n \\ VF - U = X^{m+n+1} G, \text{ où } G \in K[X]. \end{cases}$$

2) *Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_k = \sum_{i=0}^{k} f_i X^i$ (où $f_i = 0$ si $i > N$). Dans l'algorithme 1 appliqué à (X^{m+n+1}, F_{m+n}), on note i le plus petit entier tel que $\deg R_i \leqslant m$. Montrer que (R_i, B_i) est un approximant de Padé de type (m,n) de F.*

L'hypothèse sur i signifie que $\deg R_i \leqslant m$ et $\deg R_{i-1} \geqslant m+1$, donc $n_{i-1} \geqslant m+1$. De plus, $n_0 = m+n+1$ donc $\deg B_i = n_0 - n_{i-1} \leqslant m+n+1-(m+1) = n$. Les polynômes R_i et B_i vérifient bien les contraintes de degrés imposées, ainsi que l'égalité $R_i = B_i F + A_i X^{m+n+1}$, donc

$$B_i F - R_i = -A_i X^{m+n+1} \tag{1}$$

3) *Soient (U_0, V_0) et (U,V) deux approximants de Padé de type (m,n) de F.*

a) Montrer que $\deg \begin{vmatrix} V_0 & U_0 \\ V & U \end{vmatrix} \leqslant m+n$.

Cela vient du fait que $\deg(UV_0) = \deg U + \deg V_0 \leqslant m+n$ et $\deg(U_0 V) = \deg U_0 + \deg V \leqslant m+n$. Donc

$$\deg(UV_0 - U_0 V) \leqslant \max\{\deg(UV_0), \deg(U_0 V)\} \leqslant m+n$$

b) En déduire que si

$$\begin{cases} V_0 F_{m+n} - X^{m+n+1} W_0 = U_0 \\ \text{et } V F_{m+n} - X^{m+n+1} W = U \end{cases}$$

alors il existe $Z \in K(X)$ tel que $(U,V,W) = Z(U_0, V_0, W_0)$.

Si (V_0, W) et (V, W) sont linéairement indépendants sur $K(X)$, alors $\begin{vmatrix} V_0 & W_0 \\ V & W \end{vmatrix} \neq 0$. On considère le système

$$\begin{cases} V_0 x + W_0 y = U_0 \\ V x + W y = U \end{cases} \tag{2}$$

C'est un système de déterminant non nul. Il admet donc une unique solution. Or, on connaît déjà cette solution : c'est $(x, y) = (F_{m+n}, -X^{m+n+1})$ donc

$$-X^{m+n+1} = \frac{\begin{vmatrix} V_0 & U_0 \\ V & U \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V_0 & W_0 \\ V & W \end{vmatrix}}$$

C'est absurde puisque $\deg \begin{vmatrix} V_0 & U_0 \\ V & U \end{vmatrix} \leqslant m + n$. On en déduit que (V_0, W_0) et (V, W) sont liés, c'est-à-dire qu'il existe $Z \in K(X)$ tel que $(V, W) = Z(V_0, W_0)$ (puisque $(V_0, W_0) \neq (0, 0)$). Donc $U = ZU_0$ à cause des égalités (2) et finalement $(U, V, W) = Z(U_0, V_0, W_0)$.

c) Montrer que si (U_0, V_0) est égal au (R_i, B_i) de la question 2, alors $Z \in K[X]$.
On écrit $Z = P/Q$ où $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$. Alors $(U, V, W)Q = (U_0, V_0, W_0)P$. On en déduit que $VQ = V_0P$ et $WQ = W_0P$ donc Q divise V_0 et W_0. Or dans l'algorithme d'Euclide étendu appliqué à X^{m+n+1} et F_{m+n}, $V_0 = B_i$ et $W_0 = A_i$ qui sont premiers entre eux d'après l'égalité $\begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_{i+1} & B_{i+1} \end{vmatrix} = (-1)^i$. On en déduit que $Q \in K^*$.

4) *Écrire une fonction* `Pade` *de complexité algébrique en $O((m+n+1)^2)$ qui étant donnés F, m et n calcule un approximant de Padé (U, V) de type (m, n) de F de telle sorte que U soit unitaire (si par exemple $F = X + X^2 + 3X^3$, $m = 1$ et $n = 2$, on doit trouver $(X, -2X^2 - X + 1)$).*

Comme l'algorithme d'Euclide est de complexité quadratique, la complexité algébrique de `Pade` est bien en $O((m + n + 1)^2)$.

5) *Soit (u_n) une suite satisfaisant une relation de récurrence*

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \cdots + a_k u_n \tag{3}$$

où les a_i sont des éléments inconnus de K. On suppose connaître les $2k$ premiers termes de (u_n).

a) Soient pour $N \in \mathbb{N}$ les polynômes $A = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i X^i$ et $F_N = \sum_{i=0}^{N} u_i X^i$. Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $\deg B \leqslant k - 1$ et tel que pour tout N, $AF_N - B \equiv 0 \mod X^{N+1}$.

Faisons le produit AF_N en regroupant les puissances de X.

$$\begin{aligned} AF_N \equiv\, & u_0 + (u_1 - a_1u_0)X + (u_2 - a_1u_1 - a_2u_2)X^2 \\ & + \dots \\ & + (u_{k-1} - a_1u_{k-2} - \cdots - a_{k-1}u_0)X^{k-1} \\ & + \sum_{n=0}^{N-k} (u_{n+k} - a_1u_{n+k-1} - \cdots - a_ku_k)X^{n+k} \mod X^{N+1} \end{aligned} \tag{4}$$

Comme pour tout n, $u_{n+k} - a_1 u_{n+k-1} - \cdots - a_k u_k = 0$, on obtient

$$AF_N \equiv u_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(u_i - \sum_{j=1}^{i} a_i u_{j-i} \right) X^i \mod X^{N+1}$$

b) Soit (U, V) *le résultat de* `Pade`$(F_{2k-1}, k-1, k)$. *Montrer que* $V(0) \neq 0$. D'après la question 3.c, il existe $Z \in K[X]$ tel que $A = UV$. Comme $A(0) = 1$, $V(0) \neq 0$.

c) Programmer une fonction `Recurrence` *utilisant* `Pade` *qui étant donnée la liste* $[u_0 \ldots, u_{2k-1}]$*, rend une liste* $[a_1, \ldots, a_k]$ *vérifiant (3) (justifier votre réponse).*

On applique `Pade` à $(F_{2k-1}, k-1, k)$. On trouve (U, V) tels que $\deg U \leqslant k-1$, $\deg V \leqslant k$ et $FV - U \equiv 0 \mod X^{2k}$. Soient $A = V/V(0)$ et $B = U/V(0)$. On obtient l'égalité $AF_{2k-1} - B \equiv 0 \mod X^{2k}$ et $A(0) = 1$. On note $A = 1 - a_1 X - \cdots - a_k X^k$. Dans le cas où $N = 2k-1$, la congruence (4) devient

$$\begin{aligned} AF_{2k-1} \equiv & u_0 + (u_1 - a_1 u_0)X + (u_2 - a_1 u_1 - a_2 u_2)X^2 \\ & + \ldots \\ & + (u_{k-1} - a_1 u_{k-2} - \cdots - a_{k-1} u_0) X^{k-1} \\ & + \sum_{n=0}^{k-1} (u_{n+k} - a_1 u_{n+k-1} - \cdots - a_k u_k) X^{n+k} \mod X^{2k} \\ \equiv & B \mod X^{2k} \end{aligned}$$

On obtient donc que $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \cdots + a_k u_n \ \forall n \in [[0, k-1]]$.

6) *Essayer avec* $k = 2$ *et une suite d'entiers commençant par* $(3, 5, 8, 13)$*, puis* $k = 3$ *et une suite d'entiers commençant par* $(0, 1, 1, -2, 4, 1)$.

On trouve les relations suivantes : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci), puis $u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n$.