	4TPU207U Algèbre Linéaire 1 **Exemple de sujet d'examen** **Durée : 3h** Documents et calculette non autorisés. Aucun matériel électronique autorisé.	**Collège Sciences et Technologies**

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$. On note I_3 la matrice identité de taille 3.

1. Montrer que si $a = 0$, la matrice M est de rang 2.
2. Montrer que si $a = -1$, la matrice M est de rang 2.
3. Montrer que M est de rang 3 si et seulement si a n'appartient pas à $\{-1, 0\}$.
4. Pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle inversible ?
5. Calculer M^2, puis M^3, et en déduire la relation
$$M^3 - 3aM = (a^2 + a)I_3.$$
6. Lorsque M est inversible, utiliser la question 5 pour exprimer M^{-1} en fonction de M et de a.

Exercice 2 :

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{e}_3 = (2, 1, 0)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les images par f des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
3. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Expliciter P et calculer son inverse P^{-1}.
5. Montrer par récurrence sur k que, pour tout $k \geq 1$, on a $M^k = PD^kP^{-1}$

6. En déduire que pour tout $k \geq 1$,

$$M^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} 1+2^k & -2+2^{k+1} & 1-2^k \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 1-2^k & -2+2^{k+1} & 1+2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice, on écrira tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ en colonnes. On pose $E = \mathrm{Ker}(J)$ et $F = \mathrm{Im}(J)$.

1. Déterminer E et F. On en donnera une base et leur dimension.
2. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^4$ qui est la réunion d'une base de E et d'une base de F. Soit f_J l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f_J \ : \ \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ X &\mapsto JX. \end{aligned}$$

   Déterminer la matrice de f_J dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 :

Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit U un sous-espace vectoriel de E.

1. On note $f(U) = \{f(\vec{u}) : \vec{u} \in U\}$. Montrer que $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Montrer que $\dim(f(U)) \leq \dim(U)$.
3. Montrer que si f est injective, alors $\dim(f(U)) = \dim(U)$.